1. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖지 않는 것은?

① $y=-x^2+1$
② $y=-10x^2-\frac{1}{3}$
③ $y=-2(x-1)^2$
④ $y=-\left(x-\frac{1}{5}\right)^2$
⑤ $y=3x^2+4$

해설

이차항의 계수가 음수일 때, 최댓값을 가진다.

2. 부등식 $ax + 1 > 3x + 2a$ 의 해가 $x < 1$ 일 때, a 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$(a-3)x > 2a-1$ 이므로
먼저 $a = 3$ 인 경우를 생각하면
(좌변)$= 0$, (우변)$= 5$ 가 되어 부등식이 성립하지 않는다.
따라서 $a \neq 3$ 인 경우만 생각하면 된다.
(i) $a > 3$ 이면 $x > \dfrac{2a-1}{a-3}$ 이 되어 $x < 1$ 의 형태가 될 수 없다.
(ii) $a < 3$ 이면 $x < \dfrac{2a-1}{a-3} = 1$ 에서 $2a - 1 = a - 3 \therefore a = -2$

3. 수직선 위의 두 점 P(2), Q(x)에 대하여 P, Q 두 점 사이의 거리가 4일 때, x의 값은 2개이다. 이 중에서 2보다 큰 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 6

해설

$x > 2$ 일 때, $x - 2 = 4$

$\therefore\ x = 6$

4. 직선 $x+y=2$ 위에 있고, 두 점 $\mathrm{A}(2,3)$, $\mathrm{B}(3,2)$ 에 이르는 거리가 같은 점 P 의 좌표는?

① $(0,2)$ ② $(1,1)$ ③ $(2,0)$
④ $(3,-1)$ ⑤ $(4,-2)$

해설

점 P 의 좌표를 $\mathrm{P}(a, 2-a)$ 로 놓으면

$\overline{\mathrm{PA}} = \sqrt{(a-2)^2+(2-a-3)^2}$
$= \sqrt{2a^2-2a+5}$

$\overline{\mathrm{PB}} = \sqrt{(a-3)^2+(2-a-2)^2}$
$= \sqrt{2a^2-6a+9}$

그런데 $\overline{\mathrm{PA}} = \overline{\mathrm{PB}}$ 이므로 $\overline{\mathrm{PA}}^2 = \overline{\mathrm{PB}}^2$ 에서

$2a^2-2a+5 = 2a^2-6a+9$

$4a = 4$ 에서 $a = 1$

$\therefore$ $\mathrm{P}(1,\ 1)$

5. A(a, 8), B(b, a), C(5, b) 인 △ABC 의 무게중심이 G(a, 3) 일 때, 선분 BG 의 길이는?

① 2　② $\sqrt{10}$　③ $2\sqrt{3}$　④ $3\sqrt{3}$　⑤ $\sqrt{34}$

해설

$\dfrac{a+b+5}{3}=a$, $\dfrac{8+a+b}{3}=3$

$\therefore a=2$, $b=-1$

따라서 $\overline{\mathrm{BG}}=\sqrt{(2+1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$

6. 다항식 x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 나눌 때, 나머지가 $3x+4$가 되도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -7

해설

x^3+ax-8을 x^2+4x+b로 직접나눈 나머지는

$(a-b+16)x+4b-8$

$(a-b+16)x+4b-8=3x+4\cdots\cdots$ ㉠

㉠이 x에 대한 항등식이므로,

$a-b+16=3,\ 4b-8=4$

$\therefore\ a=-10,\ b=3$

$\therefore\ a+b=-7$

해설

$x^3+ax-8=(x^2+4x+b)(x+p)+3x+4$의 양변의 계수를 비교하여 $a=-10,\ b=3,\ p=-4$를 구해도 된다.

7. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1 + 2i$ 이면 다른 한 근은 $1 - 2i$ 이다.
(두 근의 합) $= (1 + 2i) + (1 - 2i) = -a \quad \cdots\cdots$ ㉠
(두 근의 곱) $= (1 + 2i)(1 - 2i) = b \quad \cdots\cdots$ ㉡
$\therefore$ ㉠, ㉡에서
$a = -2,\ b = 5$ 이다.

8. 연립부등식 $\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6>x \\ x-1<3 \end{cases}$ 을 만족하는 정수는 몇 개인지 구하여라.

▶ 답: 개

▷ 정답: 5개

해설

$\begin{cases} 7-2x \geq -3 \\ 4x+6>x \\ x-1<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 5 \\ x>-2 \\ x<4 \end{cases}$

따라서 $-2<x<4$ 이므로 연립방정식을 만족하는 정수는 $-1, 0, 1, 2, 3$ 으로 5 개 이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} 3x+2 \geq -13 \\ x-1 \geq 2x \end{cases}$ 의 해를 구하면?

① 해가없다 ② $1 \leq x \leq 5$ ③ $-5 \leq x \leq 1$
④ $-1 \leq x \leq 5$ ⑤ $-5 \leq x \leq -1$

해설

부등식 $3x+2 \geq -13$을 풀면
$3x+2 \geq -13$
$\therefore\ x \geq -5$
부등식 $x-1 \geq 2x$을 풀면
$x-1 \geq 2x$
$\therefore\ x \leq -1$
$\therefore\ -5 \leq x \leq -1$

10. 연립부등식 $\begin{cases} 3x-4 \le 2 \\ 5-2x < 9 \end{cases}$ 의 해가 $a < x \le b$이다. 이때, a, b의 값을 각각 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$3x-4 \le 2$
$3x \le 6$
$\therefore \ x \le 2$

$5-2x < 9$
$2x > -4$
$\therefore \ x > -2$

따라서 $-2 < x \le 2$ 에서 $a = -2$, $b = 2$ 이다.

11. 부등식 $2(x-1) \le 5x+1 < 3(x+1)+1$ 을 만족시키는 x 의 값 중 가장 큰 정수와 가장 작은 정수의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$\begin{cases} 2(x-1) \le 5x+1 \\ 5x+1 < 3(x+1)+1 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} 2x-5x \le 1+2 \\ 5x-3x < 3+1-1 \end{cases} \rightarrow$

$\begin{cases} x \ge -1 \\ x < \dfrac{3}{2} \end{cases}$

$-1 \le x < \dfrac{3}{2}$

가장 큰 정수 : 1

가장 작은 정수 : -1

$\therefore\ 1+(-1)=0$

12. 직선 $x+2y+3=0$ 과 수직이고 점 $(2,\ 0)$ 을 지나는 직선의 방정식을 구하면?

① $2x-y-4=0$
② $x-2y-4=0$
③ $2x-3y-4=0$
④ $3x-y-4=0$
⑤ $3x-2y-4=0$

해설

$y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$ 에 수직이므로, 기울기은 2
$(2,0)$ 을 지나므로,
$\Rightarrow\ \ y=2(x-2)$
$\Rightarrow\ \ y=2x-4$

13. 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $\mathrm{A}(1,2)$ 에서 그은 접선의 방정식은?

① $-2x+y+5=0$　　② $-2x+y-3=0$

③ $x-y+5=0$　　④ $x+2y+5=0$

⑤ $x+2y-5=0$

해설

접점이 주어졌을 때 접선의 방정식 구하는 공식
$x_1x+y_1y=r^2$ 을 이용하면,
$1\cdot x+2\cdot y=5 \quad \therefore\ x+2y-5=0$

14. 직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여 대칭이동한 다음, 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식을 구하면?

① $x-y-5=0$
② $2x-4y-9=0$
③ $3x-2y-40=0$
④ $2x-y-21=0$
⑤ $6x-3y-29=0$

해설

직선 $2x-3y+6=0$ 을 점 $(4,-3)$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(8-x)-3(-6-y)+6=0$
즉, $2x-3y-40=0$
이것을 다시 직선 $y=-x$ 에 대하여
대칭이동한 도형의 방정식은
$2(-y)-3(-x)-40=0$
$\therefore 3x-2y-40=0$

15. $\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}$가 $x-y-1 \neq 0$인 어떤 x, y의 값에 대하여도 항상 일정한 값을 가질 때, $a-b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -4

해설

$\dfrac{2x+ay-b}{x-y-1}=k$라 놓으면

$2x+ay-b=k(x-y-1)$

x, y에 대하여 정리하면,

$(2-k)x+(a+k)y-b+k=0$

위의 식이 x, y에 대한 항등식이어야 하므로

$2-k=0$, $a+k=0$, $-b+k=0$

$\therefore$ $k=2$, $a=-2$, $b=2$

$\therefore$ $a-b=-4$

16. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56　② 28　③ −28　④ −46　⑤ −56

해설

a, b, c, d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.
조립제법을 이용해 보면

$$\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & & \\
 & & -2 & 2 & 3 & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow & \mathrm{d} \\
 & & -2 & 4 & & & \\
\hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & \leftarrow & \mathrm{c} & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow \mathrm{b} & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \mathrm{a} & & & & &
\end{array}$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

17. $x^4+2x^2y^2+9y^4$을 인수분해하면?

① $(x^2+3y^2)^2$

② $(x^2-3y^2)^2$

③ $(x^2+xy+3y^2)(x^2-xy+3y^2)$

④ $(x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)$

⑤ $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$

해설

(준식) $= x^4+6x^2y^2+9y^4-4x^2y^2$
$= (x^2+3y^2)^2-(2xy)^2$
$= (x^2+2xy+3y^2)(x^2-2xy+3y^2)$

18. 이차방정식 $(2-k)x^2+2kx+1=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖도록 하는 실수 k의 범위를 구하면?

① $k \le 2$ ② $k > -2$ ③ $k \le -2$
④ $0 < k \le 2$ ⑤ $k > 2$

해설

서로 다른 부호의 실근을 가지려면 두 근의 곱인 $\frac{1}{2-k} < 0$을 만족시키면 된다.
따라서 $k > 2$

19. 연립방정식 $\begin{cases} 5(2x-3) \le 3x-1 \\ 0.3x-4 < 4.8x+5 \end{cases}$ 의 해가 될 수 없는 것은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

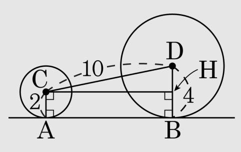
해설

$10x-15 \le 3x-1$, $7x \le 14$, $x \le 2$
$3x-40 < 48x+50$, $-90 < 45x$, $x > -2$
$\therefore -2 < x \le 2$

20. 두 원 $(x+3)^2+(y+2)^2=4$, $(x-5)^2+(y-4)^2=16$ 과 두 원의 공통외접선의 교점을 각각 A, B 라 하고, 두 원의 중심을 각각 C, D 라고 할 때, 사각형 CABD 의 넓이는?

① $10\sqrt{2}$ ② $10\sqrt{3}$ ③ $10\sqrt{6}$ ④ $12\sqrt{3}$ ⑤ $12\sqrt{6}$

해설



두 원의 중심의 좌표는 각각
C $(-3,-2)$, D $(5,4)$ 이므로

$\overline{CD}=\sqrt{(5+3)^2+(4+2)^2}=10$

다음 그림과 같이 점 C 에서 $\overline{BD}$ 에 내린 수선의 발을 H 라고 하면

$\overline{DH}=4-2=2$ 이므로

$\overline{CH}=\sqrt{100-4}=4\sqrt{6}$

$\therefore \overline{AB}=\overline{CH}=4\sqrt{6}$

따라서, 사각형 CABD 는 사다리꼴이므로 구하는 넓이는

$\frac{1}{2}\times(4+2)\times4\sqrt{6}=12\sqrt{6}$

21. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3 \quad \therefore\ a=1$

22. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개　　② 4개　　③ 5개　　④ 6개　　⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$
$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$
$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$
$$\therefore\ (x, y, z)=$$
$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right), \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$
$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right), \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$
$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right), \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

23. 연립부등식 $-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$ 의 해가 $\frac{2}{5} < x < b$ 일때, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$-1.2 < \frac{2x-a}{6} < -x$

$\rightarrow \begin{cases} -7.2 < 2x-a \\ 2x-a < -6x \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x > \frac{a-7.2}{2} \\ x < \frac{a}{8} \end{cases}$

$\frac{a-7.2}{2} < x < \frac{a}{8}$ 가 $\frac{2}{5} < x < b$ 이므로

$\frac{a-7.2}{2} = \frac{2}{5}$

$5a-36 = 4$

$\therefore\ a = 8$

$\therefore\ b = \frac{a}{8} = \frac{8}{8} = 1$

24. 원 $x^2 + y^2 = 1$과 직선$ax + by + c = 0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c = b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c = 2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c = \sqrt{a^2 + b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠ ② ㉠, ㉡ ③ ㉠, ㉢
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 (0, 0)이므로 원의 중심에서 직선
$ax + by + c = 0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$d = \frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

㉠ $d = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} < 1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A \cap B) = 2$

㉡ $d = \frac{2b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \geq \frac{2b}{\sqrt{2}b} > 1$ ($\because$ $b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

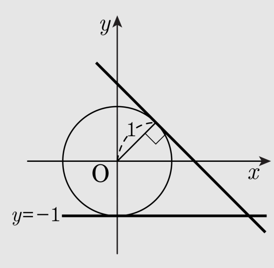
㉢ $d = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$

그러므로 교점은 1 개다.
따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

25. 점 $(2,\ -1)$에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 접선의 방정식이 $y=a_1x+b_1, y=a_2x+b_2$일 때, $a_1a_2-b_1b_2$ 의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{5}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{5}{3}$ ⑤ $-\frac{4}{3}$

해설



접선의 방정식을 $y=ax+b$라고 하면, $(2,\ -1)$을 지나므로 $-1=2a+b$ $\therefore\ b=-2a-1$

$y=ax-2a-1,\quad ax-y-2a-1=0$

원점과 접선과의 거리가 1이므로

$\frac{|-2a-1|}{\sqrt{a^2+1}}=1$

$|-2a-1|=\sqrt{a^2+1}$

$4a^2+4a+1=a^2+1,\quad 3a^2+4a=0$

$\therefore\ a=0\ or\ -\frac{4}{3}$

$\therefore\ y=-\frac{4}{3}x+\frac{5}{3},\ \ y=-1$

$\therefore\ a_1=-\frac{4}{3},\ \ a_2=0,\ \ b_1=\frac{5}{3},\ \ b_2=-1$

$\therefore\ a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2=0-\left(-\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$