1. 다음은 학생 8 명의 기말고사 국어 성적을 조사하여 만든 것이다. 학생들 8 명의 국어 성적의 분산은?

계급	도수
$55^{\text{이상}} \sim 65^{\text{미만}}$	3
$65^{\text{이상}} \sim 75^{\text{미만}}$	3
$75^{\text{이상}} \sim 85^{\text{미만}}$	1
$85^{\text{이상}} \sim 95^{\text{미만}}$	1
합계	8

① 60　② 70　③ 80　④ 90　⑤ 100

해설

학생들의 국어 성적의 평균은

$$(\text{평균}) = \frac{\{(\text{계급값})\times(\text{도수})\}\text{의 총합}}{(\text{도수})\text{의 총합}} = \frac{560}{8} = 70(\text{점})$$

따라서 구하는 분산은

$$\frac{1}{8}\{(60-70)^2\times3+(70-70)^2\times3+(80-70)^2\times1+(90-70)^2\times1\}$$

$$= \frac{1}{8}(300+0+100+400) = 100$$

이다.

2. 세변의 길이가 각각 다음과 같을 때, 직각삼각형이 아닌 것은?

① $3, 5, 4$　　② $4, 2, 2\sqrt{3}$　　③ $\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, \sqrt{5}$

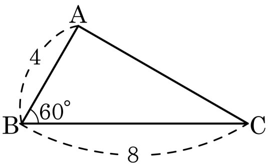
④ $\sqrt{15}, 6, \sqrt{21}$　　⑤ $4, 5, 2\sqrt{2}$

해설

세 변의 길이가 a, b, c 인 삼각형에서 가장 긴 변의 길이를 c 라고 할 때, $a^2 + b^2 = c^2$ 성립하면 직각삼각형이고, $a^2 + b^2 \neq c^2$ 이면 직각삼각형이 아니다.

⑤ 가장 긴 변은 5 이고, $4^2 + (2\sqrt{2}) \neq 5^2$ 이므로 직각삼각형이 아니다.

3. 다음 그림에서 $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① $4\sqrt{3}$ ② 8 ③ $6\sqrt{3}$

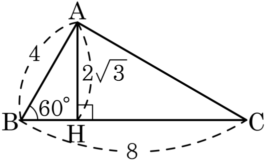
④ $7\sqrt{3}$ ⑤ $8\sqrt{3}$

해설

점 A 에서 $\overline{BC}$ 에 내린 수선의 발을 H 라 하면 $\triangle ABH$ 에서 $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AH} : 4 = \sqrt{3} : 2$

$\therefore \overline{AH} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 8 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$



4. 두 점 $\mathrm{A}(a,\ 4)$, $\mathrm{B}(-7,\ b)$ 의 중점의 좌표가 $(-1,\ 5)$ 일 때, $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 길이는?

① $\sqrt{37}$　② $2\sqrt{37}$　③ $4\sqrt{37}$

④ $\dfrac{3\sqrt{37}}{2}$　⑤ $\dfrac{\sqrt{37}}{2}$

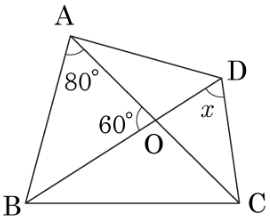
해설

$\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점은 $\left(\dfrac{a-7}{2},\ \dfrac{4+b}{2}\right) = (-1,\ 5)$ 이므로 $a = 5,\ b = 6$

$\mathrm{A}(5,\ 4),\ \mathrm{B}(-7,\ 6)$

$\therefore \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(5+7)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{144+4} = 2\sqrt{37}$

5. 다음 그림에서 □ABCD 가 원에 내접할 때 $\angle BAC = 80°$, $\angle AOB = 60°$ 이다. 이때, x 의 값을 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\qquad °}$

▷ 정답 : $80°$

해설

$\angle BAC = \angle BDC \quad \therefore \ x = 80°$

6. 다섯 개의 변량 5, 7, x, y, 8 의 평균이 6 이고, 분산이 5 일 때, $2xy$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 33

해설

다섯 개의 변량 5, 7, x, y, 8 의 평균이 6 이므로

$$\frac{5+7+x+y+8}{5}=6,\quad x+y+20=30$$

$\therefore x+y=10 \quad \cdots\cdots$ ㉠

또, 분산이 5 이므로

$$\frac{(5-6)^2+(7-6)^2+(x-6)^2+(y-6)^2}{5}+\frac{(8-6)^2}{5}=5$$

$$\frac{1+1+x^2-12x+36+y^2-12y+36+4}{5}=5$$

$$\frac{x^2+y^2-12(x+y)+78}{5}=5$$

$x^2+y^2-12(x+y)+78=25$

$\therefore x^2+y^2-12(x+y)=-53 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉡의 식에 ㉠을 대입하면

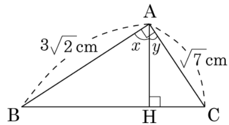
$x^2+y^2=12(x+y)-53=12\times 10-53=67$

$\therefore\ x^2+y^2=67 \quad \cdots\cdots$ ㉢

$(x+y)^2=x^2+y^2+2xy,\quad 10^2=67+2xy,\ 2xy=33$

$\therefore 2xy=33$

7. 다음 그림과 같이 $\angle A = 90°$ 인 직각삼각형의 점 A 에서 빗변에 내린 수선의 발을 H 라 하고, $\overline{AB} = 3\sqrt{2}\text{cm}$, $\overline{AC} = \sqrt{7}\text{cm}$, $\angle BAH = x$, $\angle CAH = y$ 일 때, $3\sin^2 x - 2\sin^2 y$ 의 값을 구하여라.



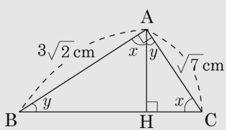
▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{8}{5}$

해설

$x + y = 90°$

$\therefore \angle B = y,\ \angle C = x$



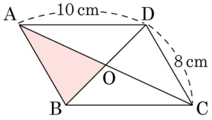
$\triangle ABC$ 에서

$\overline{BC} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 + (\sqrt{7})^2} = 5(\text{cm})$

$\therefore \sin x = \dfrac{3\sqrt{2}}{5},\ \sin y = \dfrac{\sqrt{7}}{5}$

$3\sin^2 x - 2\sin^2 y = \dfrac{54}{25} - \dfrac{14}{25} = \dfrac{40}{25} = \dfrac{8}{5}$

8. 다음 그림과 같은 평행사변형 ABCD 에서 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 의 교점을 O 라고 하자. $\angle BCD = 60°$, $\overline{AD} = 10\text{cm}$, $\overline{CD} = 8\text{cm}$ 일 때, $\triangle ABO$ 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad\qquad\quad \text{cm}^2}$

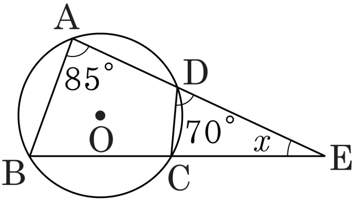
▷ 정답 : $10\sqrt{3}\ \underline{\text{cm}^2}$

해설

$$(\square\text{ABCD의 넓이}) = 10 \times 8 \times \sin 60°$$
$$= 10 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= 40\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$$

$$\therefore\ \triangle ABO = 40\sqrt{3} \times \frac{1}{4} = 10\sqrt{3}\ \left(\text{cm}^2\right)$$

9. 다음 그림에서 $\angle x$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : ________ °

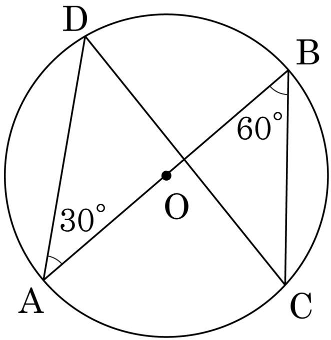
▷ 정답 : 25 °

해설

$\angle \mathrm{DCE} = 85^\circ$

$\angle x = 180^\circ - 85^\circ - 70^\circ = 25^\circ$

10. 다음 그림에서 $\overline{AB}$ 는 원 O 의 지름이고 $\angle DAB = 30°$, $\angle ABC = 60°$ 일 때, $\angle ACD$ 의 크기를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\qquad\qquad}$ °

▷ 정답 : 60 °

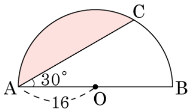
해설

$\angle DAB = \angle DCB = 30°$

$\angle ACB = 90°$ 이므로

$\therefore \angle ACD = 90° - 30° = 60°$

11. 그림과 같이 반지름의 길이가 16 인 반원에서 $\angle BAC = 30°$ 일 때, 색칠한 부분의 넓이를 구하여라.



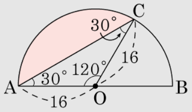
▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{256}{3}\pi - 64\sqrt{3}$

해설

$$16 \times 16 \times \pi \times \frac{120°}{360°} - \frac{1}{2} \times 16 \times 16 \times \sin(180° - 120°)$$

$$= \frac{256}{3}\pi - 64\sqrt{3}$$

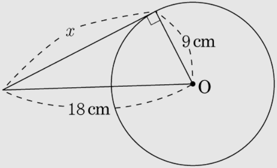


12. 반지름의 길이가 9cm 인 원의 중심으로부터 18cm 떨어진 점에서 그 원에 그은 접선의 길이는?

① $9\sqrt{3}$cm ② $10\sqrt{3}$cm ③ $11\sqrt{3}$cm

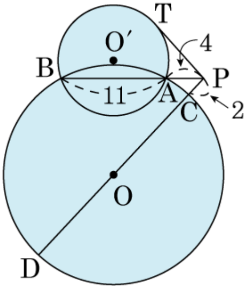
④ $12\sqrt{3}$cm ⑤ $13\sqrt{3}$cm

해설



$$x = \sqrt{18^2 - 9^2} = \sqrt{9^2(4-1)} = 9\sqrt{3}\text{(cm)}$$

13. 다음 그림과 같이 두 원이 두점에서 만날 때, 원 O 의 넓이는?



① 121π ② 144π ③ 169π ④ 196π ⑤ 225π

해설

$\overline{PT}^2 = \overline{PA} \times \overline{PB} = \overline{PC} \times \overline{PD}$

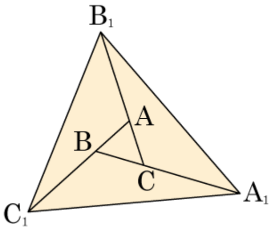
$4 \times 15 = 2 \times (2 + 2r)$

$60 = 2 \times (2 + 2r)$

$r = 14$

$\therefore \pi(14)^2 = 196\pi$

14. 다음 그림과 같이 주어진 $\triangle ABC$ 에 대하여 변 BC 의 연장선 위에 $2\overline{BC} = \overline{CA_1}$ 이 되도록 점 A_1 를 찍고 같은 방법으로 점 B_1, C_1 를 찍어 $\triangle A_1B_1C_1$ 을 만들었다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 4 일 때, $\triangle A_1B_1C_1$ 의 넓이는?



① 70 ② 72 ③ 74 ④ 76 ⑤ 78

해설

$\triangle BC_1A_1$ 의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times \overline{BC_1} \times \overline{BA_1} \times \sin \angle C_1BA_1$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(2\overline{AB}\right) \times \left(3\overline{BC}\right) \times \sin\left(180° - \angle C_1BA_1\right)$$

$$= 6 \times \left(\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{BC} \times \sin \angle ABC\right)$$

$$= 6 \times (\triangle ABC\text{의 넓이})$$

마찬가지로 계산하면

$$\triangle AB_1C_1 = \triangle CB_1A_1 = 6\triangle ABC$$

$$\therefore \ \triangle A_1B_1C_1 = 18\triangle ABC + \triangle ABC$$

$$= 19\triangle ABC$$

$$= 76$$

15. 한 변의 길이가 r 인 정사각형 ABCD 의 외접원에서 호 AB 위에 임의의 한 점 P 를 잡을 때, $\dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}$ 의 값을 r 을 사용하여 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\sqrt{2}$

해설

대각선 BD 의 길이는 $\sqrt{2}r$

사각형 BCDP 도 정사각형의 외접원에 외접하므로

$\overline{\mathrm{PB}}\cdot\overline{\mathrm{CD}}+\overline{\mathrm{PD}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{PC}}\cdot\overline{\mathrm{BD}}$

$r\overline{\mathrm{PB}}+r\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{2}r\,\overline{\mathrm{PC}},\ \overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}=\sqrt{2}\,\overline{\mathrm{PC}}$

$\therefore \dfrac{\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}}{\overline{\mathrm{PC}}}=\sqrt{2}$