1. x^3-4x^2+x+6을 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x+c)$이다. $a^2+b^2+c^2$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 14

해설

$f(x)=x^3-4x^2+x+6$이라 놓으면,

$x=-1$일 때, $-1-4-1+6=0$

따라서, $f(x)$는 $(x+1)$로 나누어 떨어진다.

즉, $f(x)$는 $(x+1)$의 인수를 갖는다.

즉, $f(x)=(x+1)Q(x)$ 꼴

$Q(x)$는 조립제법으로 구한다.

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 1 & -4 & 1 & 6 \\ & & -1 & 5 & -6 \\ \hline & 1 & -5 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

$f(x)=(x^2-5x+6)(x+1)$

$\therefore\ f(x)=(x-3)(x-2)(x+1)$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=(-3)^2+(-2)^2+1^2=14$

2. 이차방정식 $3x^2 - 6x + 4 = 0$의 두 근을 α, β라고 할 때, $\alpha^3 + \beta^3$의 값을 구하면?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = \dfrac{4}{3}$

$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$

$= 8 - 3 \times \dfrac{4}{3} \times 2 = 0$

3. $y = -3(x-2)(x-4)$ 의 그래프에서 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 3

해설

$$
\begin{aligned}
y &= -3(x-2)(x-4) \\
&= -3(x^2 - 6x + 8) \\
&= -3x^2 + 18x - 24 \\
&= -3(x-3)^2 + 3
\end{aligned}
$$

$x = 3$ 일 때, 최댓값은 3 이다.

4. 다음 중 $x^2+y^2+2xy-2x-2y$ 의 인수가 <u>아닌</u> 것은?

① $x+y$ ② $-x-y$ ③ $x+y-2$

④ $x-y$ ⑤ $2x+2y$

해설

$$\begin{aligned}(\text{준 식}) &= (x^2+2xy+y^2)-2(x+y)\\ &= (x+y)^2-2(x+y)\\ &= (x+y)(x+y-2)\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}(x+y)(x+y-2) &= -(-x-y)(x+y-2)\\ &= \frac{1}{2}(2x+2y)(x+y-2)\end{aligned}$$

5. 이차부등식 $(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때, 실수 k의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$(x+1)^2 \le k(x^2-x+1)$

$(k-1)x^2-(k+2)x+k-1 \ge 0$

모든 x에 대해 성립하려면,

$k-1>0$, 판별식이 0보다 작거나 같다

$D=(k+2)^2-4(k-1)(k-1) \le 0$에서

$\{(k+2)-2(k-1)\}\{(k+2)+2(k-1)\}$

$=(-k+4)k \le 0$

$\therefore\ k(k-4) \ge 0,\quad k \le 0$ 또는 $k \ge 4$

$\therefore\ k \ge 4(\because k>1)\quad \therefore$ 최솟값 : 4

6. x 에 대한 이차부등식 $ax^2+5x+b<0$ 의 해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 일 때 상수 $a+b$ 의 값은?

① -7　② -3　③ 3　④ 7　⑤ 10

해설

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이므로 $a<0$

해가 $x<2$ 또는 $x>3$ 이고 이차항의 계수가 1인 부등식은

$(x-2)(x-3)>0,\ x^2-5x+6>0$

양변에 -1을 곱하면

$-x^2+5x-6<0$

$\therefore a=-1,\ b=-6$

$a+b=-7$

7. $2^{16}-1$은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

해설

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$ 임을 이용하여 $2^{16}-1$을 인수분해하면

$2^{16}-1=(2^8)^2-1^2$

$=(2^8+1)(2^8-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^4-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2^2-1)$

$=(2^8+1)(2^4+1)(2^2+1)(2+1)(2-1)$

$=257\cdot17\cdot5\cdot3$

따라서 $2^{16}-1$을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

8. 다항식 $f(x)$를 $x-2$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하면 나머지는 5이고, 몫 $Q(x)$를 다시 $x+3$으로 나누면 나머지가 3이다. 이때, $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는?

① 10 ② -10 ③ 9 ④ -9 ⑤ 8

해설

나머지정리에 의해 $f(x)$를 $x+3$으로 나눈 나머지는 $f(-3)$이다.

$f(x)=(x-2)Q(x)+5$에서

$x=-3$을 대입하면 $f(-3)=(-3-2)Q(-3)+5$

$Q(x)$를 $x+3$으로 나누었을 때의 나머지가 3이므로 $Q(-3)=3$

$\therefore\ f(-3)=-10$

9. 두 부등식 $x^2-2x-8>0$, $x^2-(2a+1)x+a^2+a<0$에 대하여 공통범위가 존재하지 않도록 하는 실수 a의 범위를 $b \le a \le c$라 할 때, $b+c$의 값을 구하면?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$(x-4)(x+2)>0$,

$\therefore\ x>4,\ x<-2$

$x^2-(2a+1)x+a(a+1)<0$

$(x-a)(x-a-1)<0$

두 부등식의 공통범위가 없으려면

$a \ge -2,\ a+1 \le 4 \to a \le 3$

$\therefore\ -2 \le a \le 3$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

10. x에 관한 방정식 $x^4-3x^3+5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1-2i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하면?

① $a=-1, b=-2$
② $a=-1, b=-10$
③ $a=1, b=4$
④ $a=1, b=6$
⑤ $a=2, b=6$

해설

$x=1-2i$에서 $x-1=-2i$
양변을 제곱하면 $x^2-2x+1=-4 \Leftrightarrow x^2-2x+5=0$
$x^4-3x^3+5x^2+ax+b=0$의 좌변을 x^2-2x+5로 나누면 나누어 떨어진다.
실제로 나눗셈을 하여 정리하면
$x^4-3x^3+5x^2+ax+b$
$=(x^2-2x+5)(x^2-x-2)+(a+1)x+b+10=0$
$x^2-2x+5=0$이므로
$(a+1)x+b+10=0$
$\therefore\ a+1=0,\ b+10=0$
$\therefore\ a=-1,\ b=-10$