1. $(3a+3b)-2b=3a+(3b-2b)=3a+b$ 에서 사용된 법칙을 순서대로 나열한 것은?

① 결합법칙, 결합법칙
② 교환법칙, 결합법칙
③ 교환법칙, 분배법칙
④ 결합법칙, 분배법칙
⑤ 분배법칙, 결합법칙

해설

$$\begin{aligned}(3a+3b)-2b &= 3a+(3b-2b) &&: \text{결합법칙}\\ &= 3a+(3-2)b &&: \text{분배법칙}\\ &= 3a+b\end{aligned}$$

2. $(x^3-3x^2+3x+4)(x^2+2x-5)$를 전개한 식에서 x^2의 계수를 구하면?

① 10　② 15　③ 19　④ 21　⑤ 25

해설

전개식에서 x^2 항은

i) (이차항)×(삼차항) 에서 $15x^2 + 4x^2 = 19x^2$

ii) (일차항)×(일차항) 에서 $6x^2$

$\therefore x^2$ 의 계수는 $19 + 6 = 25$

3. 복소수 $\dfrac{3+i}{1+i}+\dfrac{a-i}{1-i}$ 가 실수가 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\frac{3+i}{1+i}+\frac{a-i}{1-i}=\frac{(3+i)(1-i)+(1+i)(a-i)}{(1+i)(1-i)}$$
$$=\frac{4-2i+(a+1)+(a-1)i}{2}$$
$$=\frac{a+5+(a-3)i}{2}$$

위의 식이 실수가 되려면 허수 부분이 0이어야 하므로 $a-3=0$

$\therefore\ a=3$

4. $\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4}$ 의 값은?

① i ② $-i$ ③ $-\dfrac{i}{2}$ ④ $\dfrac{1-i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1+i}{2}$

해설

$\dfrac{1+i^3+i^6}{1+i^2+i^4} = \dfrac{1+(-i)+(-1)}{1+(-1)+1} = \dfrac{-i}{1} = -i$

5. 이차방정식 $(x-1)(x+3)=7$의 해는?

① $\dfrac{-2\pm\sqrt{11}}{2}$ ② $\dfrac{-1\pm\sqrt{11}}{2}$ ③ $-2\pm\sqrt{11}$
④ $-1\pm\sqrt{11}$ ⑤ $1\pm\sqrt{11}$

해설

$(x-1)(x+3)=7$, $x^2+2x-3-7=0$,
$x^2+2x-10=0$
근의 공식에 의해 $x=-1\pm\sqrt{1^2+10}=-1\pm\sqrt{11}$

6. 이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha+3\alpha=10 & \cdots\cdots① \\ 2\alpha\times3\alpha=k & \cdots\cdots② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha=2,\ k=6\times2^2=24$

7. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8 ② -1 ③ 0 ④ 5 ⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$ 에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$ 이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

8. 이차함수 $y = -x^2 + 4x$ 의 최댓값 또는 최솟값과 그 때의 x 의 값은?

① $x = 2$ 일 때, 최댓값은 4
② $x = -2$ 일 때, 최댓값은 4
③ $x = 4$ 일 때, 최댓값은 4
④ $x = 2$ 일 때, 최솟값은 4
⑤ $x = 4$ 일 때, 최솟값은 0

해설

$y = -x^2 + 4x$
$= -(x-2)^2 + 4$
따라서 $x = 2$ 일 때, 최댓값 4를 갖는다.

9. $f(x)=x^3-3x^2+3x+1$일 때, $f(x)-2=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$가 항상 성립하도록 하는 상수 $a,\ b$에 대하여 $a+b$의 값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$f(x)-2=x^3-3x^2+3x-1$이므로
$x^3-3x^2+3x-1=x(x^2-1)+a(x-x^2)+b(x^2-1)$
$=x^3+(-a+b)x^2+(a-1)x-b\cdots$ ㉠
㉠이 x에 대한 항등식이므로 양변의 차수가 같은 항의 계수가 같아야 한다.
즉, $-a+b=-3,\ a-1=3,\ b=1$
이므로 $a=4,\ b=1$
$\therefore\ a+b=5$

10. $f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$가 $(x-1)(x+2)$로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$f(x) = x^3 - ax^2 + bx - 2$ 라 놓으면,

$f(1) = 1 - a + b - 2 = 0$

$\therefore \; -a + b = 1 \cdots$ ㉠

$f(-2) = -8 - 4a - 2b - 2 = 0$

$\therefore \; 2a + b = -5 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a = -2$, $b = -1$

11. $f(x)=2x^3-3x^2+x-k$ 가 $x-2$를 인수로 가질 때, k를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$f(x)$ 가 $x-2$를 인수로 갖는다는 것은 $f(x)$가 $x-2$로 나누어 떨어진다는 뜻이다.
즉, $f(2)=0$을 만족시키는 k를 구하면,
$f(2)=2\times2^3-3\times2^2+2-k=0$
$\therefore\ k=6$

12. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3　　② -4　　③ 2　　④ 8　　⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$
$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$
\begin{array}{c|ccc}
1 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 3 & 5 \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} \ \leftarrow \ \mathrm{c} \\
 & & 3 & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} & \leftarrow \mathrm{c} \\
 & \uparrow & & \\
 & \mathrm{a} & &
\end{array}
$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$
$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$
$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$
$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면
$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$
$\therefore\ a=3,\ b=8$
※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

13. 복소수 z 와 그의 켤레복소수 $\bar{z}$ 에 대하여 등식 $(1-2i)z - i\bar{z} = 3-5i$ 를 만족하는 z 는?

① $1+i$　② $2+i$　③ $2+2i$
④ $1-i$　⑤ $2-i$

해설

$z = a+bi$ 라 하면 $\bar{z} = a-bi$ 이므로
$(1-2i)(a+bi) - i(a-bi) = a+bi-2ai+2b-ai-b$
$= (a+b)+(-3a+b)i = 3-5i$
따라서 $a+b=3$, $-3a+b=-5$ 이므로 연립하여 풀면
$a=2$, $b=1$
따라서 $z=2+i$ 이다.

14. 이차방정식 $x^2 + (a+1)x + a - 5 = 0$ 의 두 실근을 β, β^2 이라 할 때, $a + \beta + \beta^2$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 3

해설

두 근의 합은 $\beta + \beta^2 = -a - 1$ 이므로
$a + \beta + \beta^2 = a - a - 1 = -1$

15. 다음 사차방정식의 실근의 합을 구하여라.

$$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$x^4 - 3x^3 + 3x^2 + x - 6 = 0$ 에서 $x = -1,\ x = 2$ 를 대입하면 성립하므로

조립제법을 이용하여 인수분해하면

$$\begin{array}{r|rrrrr}
-1 & 1 & -3 & 3 & 1 & -6 \\
 & & -1 & 4 & 7 & 6 \\
\hline
2 & 1 & -4 & 7 & -6 & \boxed{0} \\
 & & 2 & -4 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -2 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$(x+1)(x-2)(x^2 - 2x + 3) = 0$

$\therefore\ x = -1$ 또는 $x = 2$ 또는 $x = 1 \pm \sqrt{2}i$

따라서 실수근은 $-1,\ 2$ 이므로 $-1 + 2 = 1$ 이다.

16. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

17. 다음 ㉠~㉣중 인수분해를 한 결과가 틀린 것은 모두 몇 개인가?

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=(a-b)(x+y)(x-y)$

㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x-2y)(3x+y)$

㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2-5x+25)$

㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2=(2x-y+2)(x-y+1)$

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

㉠ $x^2(a-b)-y^2(b-a)=x^2(a-b)+y^2(a-b)=(a-b)(x^2+y^2)$
㉡ $9x^2+3xy-2y^2=(3x+2y)(3x-y)$
㉢ $x^3-125=(x-5)(x^2+5x+25)$
㉣ $2x^2-xy-y^2-4x+y+2$
$=2x^2-(4+y)x-(y^2-y-2)$
$=2x^2-(4+y)x-(y-2)(y+1)$
$=\{2x+(y-2)\}\{x-(y+1)\}$
$=(2x+y-2)(x-y-1)$

18. 자연수 $N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$ 의 양의 약수의 개수를 구하여라.(인수분해공식을 이용하여 푸시오.)

▶ 답: ＿＿＿＿＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 49 개

해설

$a^3 + 3a^2 + 3a + 1 = (a+1)^3$

$\therefore\ N = 35^3 + 3 \cdot 35^2 + 3 \cdot 35 + 1$

$= (35+1)^3 = 36^3 = 2^6 \times 3^6$

$\therefore$ 약수의 개수 $= (6+1) \times (6+1) = 49$

19. x^2+ax-9와 x^2+bx+c의 합은 $2x^2-4x-6$, 최소공배수는 x^3-x^2-9x+9이다. $a-b+c$의 값을 구하여라. (단, a, b, c는 상수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$A = x^2 + ax - 9 = Gp$

$B = x^2 + bx + c = Gq$라 하면

$A + B = (p+q)G = 2x^2 - 4x - 6 = 2(x+1)(x-3)$

$L = pqG = x^3 - x^2 - 9x + 9 = x^2(x-1) - 9(x-1)$

$= (x-1)(x^2-9) = (x-1)(x+3)(x-3)$

따라서, $G = x-3$, $p = x+3$, $q = x-1$이다.

$\therefore\ A = (x+3)(x-3) = x^2 - 9$

$B = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\therefore\ a = 0,\ b = -4,\ c = 3$

$\therefore\ a - b + c = 7$

20. $\alpha = 2 + i,\ \beta = 1 - 2i$ 일 때, $\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + \frac{1}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\beta}\right)^2$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① $\frac{4}{8} - \frac{3}{8}i$ ② $\frac{4}{8} \pm \frac{3}{8}i$ ③ $\frac{4}{25} - \frac{3}{25}i$
④ $\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$ ⑤ $\frac{4}{8} + \frac{3}{8}i$

해설

$\alpha = 2 + i,\ \beta = 1 - 2i = -i(2 + i) = -i\alpha$ 이므로 $\beta^2 = -\alpha^2$

$\therefore\ \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\alpha^2} = 0$

$$\begin{aligned} \therefore\ (\text{준식}) &= \frac{1}{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{(2+i)(1-2i)} \\ &= \frac{1}{4-3i} \\ &= \frac{4+3i}{25} \\ &= \frac{4}{25} + \frac{3}{25}i \end{aligned}$$

21. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$에서 $a < 0,\ b > 0,\ c < 0,\ b^2 - 4ac > 0$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.

② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.

③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.

④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.

⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면
$a < 0,\ b > 0,\ c < 0$이므로
$\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a} > 0$
$\alpha\beta = \dfrac{c}{a} > 0$
$\therefore\ \alpha > 0,\ \beta > 0$

22. 이차함수 $y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$ 의 최댓값을 m 이라고 할 때, m 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -3

해설

$y = -2x^2 + 4ax - a^2 - 6a + 6$
$\quad = -2(x-a)^2 + a^2 - 6a + 6$

최댓값 $m = a^2 - 6a + 6 = (a-3)^2 - 3$

$\therefore m$ 의 최솟값 : -3

23. 다음 연립방정식의 해가 아닌 것은?

$$\begin{cases} x^2 - xy - 2y^2 = 0 \\ 2x^2 + y^2 = 9 \end{cases}$$

① $\begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$　② $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$　③ $\begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases}$

④ $\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}$　⑤ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

해설

$x^2 - xy - 2y^2 = 0$

$\Rightarrow \quad (x+y)(x-2y) = 0$

$\Rightarrow \quad x = -y$ 또는 $x = 2y$

i) $x = -y$ $2x^2 + y^2 = 2y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm\sqrt{3}, \quad x = \mp\sqrt{3}$

ii) $x = 2y$ $2x^2 + y^2 = 8y^2 + y^2 = 9$

$y = \pm 1, \quad x = \pm 2$

$\therefore$ 해 : $\begin{cases} x = \pm\sqrt{3} \\ y = \mp\sqrt{3} \end{cases}$, $\begin{cases} x = + - 2 \\ y = \pm 1 \end{cases}$

(복부호동순)

24. x에 관한 이차방정식 $a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$이 실근을 갖기 위한 실수 a의 값을 구하면?

① 1　　② -1　　③ 2　　④ -2　　⑤ 3

해설

$a(1-i)x^2+(3+2ai)x+(2a+3i)=0$ 의 실근 조건은 복소수 계수 이차방정식이므로 판별식을 쓸 수 없다. 근이 실수라는 것은 x 가 실수임을 뜻하므로 복소수의 상등정리에서

$(ax^2+3x+2a)+(-ax^2+2ax+3)i=0$ 이어야 하므로

$ax^2+3x+2a=0 \cdots\cdots$ ㉠

$-ax^2+2ax+3=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ 하면

$(2a+3)x+(2a+3)=0$, $(2a+3)(x+1)=0$

$2a+3=0$ 또는 $x+1=0$

$\therefore\ a=-\frac{3}{2}$ 또는 $x=-1$

i) $a=-\frac{3}{2}$ 일 때

㉠식에서 $-\frac{3}{2}x^2+3x-3=0,\ x^2-2x+2=0$

이므로 허근을 가진다. $\therefore\ a\neq-\frac{3}{2}$

ii) $x=-1$ 일 때 ㉠에 대입하면,

$a-3+2a=0,\ 3a=3\quad\therefore\ a=1$

25. 실수 x, y 가 방정식 $x^2 + 2xy + 2y^2 + y - 6 = 0$ 을 만족할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2yx + 2y^2 + y - 6 = 0$ 이 실근을 가지므로 판별식을 D 라고 하면

$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 + y - 6) \geq 0$

$y^2 + y - 6 \leq 0$, $(y+3)(y-2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$ 따라서, y 의 최댓값은 2 이다.