

1. $x^4 - 5x^2 - 14 = 0$ 의 두 허근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2$ 의 값을 구하면?

- ① 4 ② -4 ③ 8 ④ -8 ⑤ -16

해설

$$x^4 - 5x^2 - 14 = (x^2 + 2)(x^2 - 7) = 0 \text{이므로}$$

두 허근 α, β 는

각각 $\sqrt{2}i, -\sqrt{2}i$ 이므로

$$\alpha^2 + \beta^2 = -2 - 2 = -4$$

2. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$ 의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 + \sqrt{3}}{2}$

④ $1 + \sqrt{3}i$

⑤ $\frac{\sqrt{3} - i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$ 을 변형하면

$$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$$

$$(x^2 + 1)^2 - x^2 = 0$$

$$(x^2 + 1 + x)(x^2 + 1 - x) = 0,$$

$$x^2 + x + 1 = 0 \text{ 또는 } x^2 - x + 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ 또는 } x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

3. 다음 중 $1+i$ 가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

- ① $(x^2 - 2x + 2)(x^2 - 2x + 1)$
② $(x^2 - 2x + 2)(x - 1)(x + 1)$
③ $(x^2 - 1)(x^2 - 2x - 1)$
④ $(x^2 + 1)(x - 1)(x + 1)$
⑤ $(x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1)$

해설

한 근이 $1+i$ 이면
다른 한 근은 $1-i$ 이다.
 $\therefore \{x - (1+i)\} \{x - (1-i)\} = 0$
 $\Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0$
주어진 조건에 맞는 방정식:
 $(x^2 - 2x + 2)(x - \alpha)^2 = 0$
 $\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 삼차방정식 $x^3 - 5x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b 는 유리수)

- ① $1 - \sqrt{2}, 2$ ② $-1 + \sqrt{2}, -3$ ③ $1 - \sqrt{2}, 3$
④ $1 - \sqrt{2}, -3$ ⑤ $-1 + \sqrt{2}, 3$

해설

한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $1 - \sqrt{2}$ 이다.
삼차방정식의 근과 계수의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
 $\therefore 1 + \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2}) + \alpha = 5, \alpha = 3$
 $\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1 - \sqrt{2}$

5. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 2) - 3 = 0$ 에서
 $x^2 - 2x = t$ 로 놓으면
 $t(t - 2) - 3 = 0,$
 $t^2 - 2t - 3 = 0$
 $(t - 3)(t + 1) = 0$
 $\therefore t = 3$ 또는 $t = -1$
(i) $t = 3$, 즉 $x^2 - 2x = 3$ 일 때
 $x^2 - 2x - 3 = 0$
 $(x - 3)(x + 1) = 0$
 $\therefore x = -1$ 또는 $x = 3$
(ii) $t = -1$, 즉 $x^2 - 2x = -1$ 일 때
 $x^2 - 2x + 1 = 0$
 $(x - 1)^2 = 0$
 $\therefore x = 1$ (중근)
따라서, $-1 \times 3 \times 1 = -3$

6. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$ 이다. 유리수 p, q 의 값을 구했을 때, $p + q$ 의 값은?

① 6 ② 10 ③ -2 ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$ 의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore \alpha = 1$

$p = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 - \sqrt{2}) + \alpha(3 + \sqrt{2}) = 7 + 6 \quad \therefore p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore q = -7$

$\therefore p + q = 13 - 7 = 6$

7. x 에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 일 때, 유리수 a, b 의 합 $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1 + \sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1 - \sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β 라 하면
 $(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2}) + (1 + \sqrt{2})\beta + (1 - \sqrt{2})\beta = 5$
 $-1 + 2\beta = 5, 2\beta = 6 \quad \therefore \beta = 3$
따라서, $a = (1 + \sqrt{2}) + (1 - \sqrt{2}) + 3 = 5$
 $b = (1 + \sqrt{2}) \cdot (1 - \sqrt{2}) \cdot 3 = -3$ 이므로
 $a + b = 5 + (-3) = 2$

8. 방정식 $2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 곱 xy 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2 + y^2 + 2xy - 4x + 4 = 0$ 에서

$(x^2 + 2xy + y^2) + (x^2 - 4x + 4) = 0$

$(x + y)^2 + (x - 2)^2 = 0$

x, y 가 실수이므로 $x + y = 0, x - 2 = 0$

$\therefore x = 2, y = -2$

$\therefore xy = -4$

9. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점 이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점 짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

- ① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2점문항 개수를 x , 3점문항을 y ,
4점문항을 z 라 하자
 $2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots \textcircled{1}$
 $x + y + z = 30 \quad \cdots \textcircled{2}$
 $\textcircled{1} - 4 \times \textcircled{2} \Rightarrow y = 40 - 2x$
 $\textcircled{1} - 3 \times \textcircled{2} \Rightarrow z = x - 10$
 $\therefore x = 10$ 이면 $z = 0$
 $\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음
 $\therefore x \geq 11$, 최소 11문항

10. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 을 만족하는 실수 x 에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$ 라 하자. 이 때, a 가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$ 의 양변을 x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \frac{1}{x} = a$ 로 치환하면

$$x^2 - a - 6 = 0, (a - 3)(a + 2) = 0$$

$\therefore a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

11. 방정식 $x^2 + 2y^2 + 2xy - 4x - 10y + 13 = 0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x + y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$$x^2 + 2(y-2)x + 2y^2 - 10y + 13 = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\frac{D}{4} \geq 0$ 이다.

$$\frac{D}{4} = (y-2)^2 - (2y^2 - 10y + 13) \geq 0$$

$$-y^2 + 6y - 9 \geq 0, \quad y^2 - 6y + 9 \leq 0$$

$$(y-3)^2 \leq 0 \quad y \text{ 가 실수이므로 } y-3=0$$

$$\therefore y=3 \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{을 } \textcircled{1} \text{에 대입하면 } x^2 + 2x + 1 = 0, \quad (x+1)^2 = 0$$

$$\therefore x = -1$$

$$\therefore x + y = -1 + 3 = 2$$

12. 방정식 $2x^2 - 4xy + 5y^2 - 8x - 4y + 20 = 0$ 을 만족하는 실수 x, y 의 값은?

- ① $x = 2, y = 4$ ② $x = 4, y = 2$ ③ $x = -1, y = 2$
④ $x = 2, y = -1$ ⑤ $x = -2, y = 1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,
 $2x^2 - 4(y+2)x + 5y^2 - 4y + 20 = 0 \cdots \textcircled{1}$

①이 실근을 가지므로 $\frac{D}{4} \geq 0$ 에서

$$4(y+2)^2 - 10y^2 + 8y - 40 \geq 0$$

$$6y^2 - 24y + 24 \leq 0$$

$$6(y^2 - 4y + 4) \leq 0$$

$$6(y-2)^2 \leq 0 \quad \therefore y = 2 \quad (\because y \text{ 는 실수})$$

$y = 2$ 를 ①에 대입하면,

$$2x^2 - 16x + 32 = 0, \quad 2(x-4)^2 = 0$$

$$\therefore x = 4$$

13. $a^2 + b^2 + c^2 = 12$, $a + b + c = 4$ 이 성립할 때, c 의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, a, b, c 는 실수)

- ① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned} a + b + c &= 4 \\ \Rightarrow b &= 4 - (a + c) \\ a^2 + b^2 + c^2 &= 12 \\ \Rightarrow a^2 + c^2 + \{4 - (a + c)\}^2 &= 12 \\ a \text{에 대한 내림차순으로 정리하면} \\ a^2 + (c - 4)a + c^2 - 4c + 2 &= 0 \\ a, b, c \text{는 실수이므로 판별식이 } 0 \text{보다 크거나 같다.} \\ D = (c - 4)^2 - 4(c^2 - 4c + 2) &\geq 0 \\ \Rightarrow 3c^2 - 8c - 8 &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{4 - 2\sqrt{10}}{3} \leq c &\leq \frac{4 + 2\sqrt{10}}{3} \\ \therefore (\text{최댓값} \times \text{최솟값}) \\ &= \left(\frac{4 - 2\sqrt{10}}{3}\right) \left(\frac{4 + 2\sqrt{10}}{3}\right) \\ &= -\frac{8}{3} \end{aligned}$$

14. 방정식 $xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 을 만족하는 정수 x, y 에 대하여 xy 의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy + 4x - 2y - 11 = 0$ 에서 $(x - 2)(y + 4) = 3$

x, y 가 정수이므로

$(x - 2, y + 4) = (1, 3), (-1, -3), (3, 1), (-3, -1)$

$\therefore (x, y) = (3, -1), (1, -7), (5, -3), (-1, -5)$

$\therefore xy = -3, -7, -15, 5$

15. $x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근이 정수가 되도록 정수 m 의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m - 1)x + m + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots \textcircled{1}, \alpha\beta = m + 1 \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β 는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases} \quad \text{를 } \textcircled{2} \text{에 대입하면}$

$m = -1, 7$

16. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1, (\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

17. 이차방정식 $x^2 + (k+1)x + 2k+1 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k 의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 근을 α, β ($\alpha \geq \beta$) 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -(k+1) & \dots\dots\dots ① \\ \alpha\beta = 2k+1 & \dots\dots\dots ② \end{cases}$$

$$① \times 2 + ② \text{을 하면 } \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = -1$$

$$\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta + 4 = 3, \quad (\alpha + 2)(\beta + 2) = 3$$

$$\alpha, \beta \text{가 정수이므로 } (\alpha + 2, \beta + 2) = (3, 1), (-1, -3)$$

$$\therefore (\alpha, \beta) = (1, -1), (-3, -5)$$

①에서

$$k = -(\alpha + \beta + 1) \text{이므로 } k = -1, 7$$

$$k > 0 \text{이므로 } k = 7$$

18. 이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 서로 다른 두 근을 α, β 라 할 때, $(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + \dots + (\alpha^{100} + \beta^{100})$ 의 값을 구하면?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2 + x + 1 = 0$ 의
서로 다른 두 근이 α, β 이므로
 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \beta^2 + \beta + 1 = 0$
또, $\alpha + \beta = -1, \alpha\beta = 1$
 n 이 양의 정수일 때,
 $\alpha^{n+2} + \alpha^{n+1} + \alpha^n$
 $= \alpha^n(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$
 $\beta^{n+2} + \beta^{n+1} + \beta^n$
 $= \beta^n(\beta^2 + \beta + 1) = 0$ 이므로
 $(\alpha + \beta) + (\alpha^2 + \beta^2) + \dots + (\alpha^{100} + \beta^{100})$
 $= \alpha + \{(\alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4) + \dots + (\alpha^{98} + \alpha^{99} + \alpha^{100})\}$
 $+ \beta + \{(\beta^2 + \beta^3 + \beta^4) + \dots + (\beta^{98} + \beta^{99} + \beta^{100})\}$
 $= \alpha + \beta = -1$

19. 방정식 $x^3 = 1$ 의 한 허근을 w 라고 할 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $w^3 - 1 = 0$

② $w^2 - w + 1 = 0$

③ $w + \frac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$

⑤ 다른 허근은 w^2 이다.

해설

① $w^3 = 1$ 이므로 $w^3 - 1 = 0$

② $w^3 - 1 = 0$ 이므로

$(w - 1)(w^2 + w + 1) = 0$

$w - 1 \neq 0$ 이므로 $w^2 + w + 1 = 0$

$\therefore w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$

③ $w^2 + w + 1 = 0$ 이고

$w \neq 0$ 이므로

양변을 w 로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$

$\therefore w + \frac{1}{w} = -1$

④ $w^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega,$

$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$

$\therefore w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$

($\because w^2 + w + 1 = 0$)

⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$

따라서, w^2 은 $x^3 = 1$ 의 다른 한 허근이다.

20. $x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은?
(단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켈레복소수이다.)

$\textcircled{\tiny \neg} \omega^6 = 1$	$\textcircled{\tiny \sqcup} \omega^2 = \bar{\omega}$
$\textcircled{\tiny \ominus} \omega + \bar{\omega} = -1$	$\textcircled{\tiny \oplus} \omega^2 + \omega = -1$

- ① $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}$

② $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}$

③ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \ominus}, \textcircled{\tiny \oplus}$
- ④ $\textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \ominus}, \textcircled{\tiny \oplus}$

⑤ $\textcircled{\tiny \neg}, \textcircled{\tiny \sqcup}, \textcircled{\tiny \ominus}, \textcircled{\tiny \oplus}$

해설

$x^3 - 1 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로,
 $\omega^3 = 1, (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$
 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ 켈레근 $\bar{\omega}$ 일 경우도
 $\bar{\omega}^3 = 1, \bar{\omega}^2 + \bar{\omega} + 1 = 0$
 $\textcircled{\tiny \neg} \omega^3 = 1, (\omega^3)^2 = 1 \rightarrow (\textcircled{\tiny \circ})$
 $\textcircled{\tiny \ominus} \omega + \bar{\omega} = -1,$
 $\bar{\omega} = -1 - \omega = -(\omega + 1)$
 $\omega^2 + \omega + 1$ 을 이용.
 $\omega + 1 = -\omega^2$ 이므로 $\bar{\omega} = \omega^2 \rightarrow (\textcircled{\tiny \circ})$
 $\textcircled{\tiny \sqcup}$ 두 근 $\omega, \bar{\omega}$ 의 합은
 $x^2 + x + 1 = 0$ 의 두 근의 합이므로
 $\omega + \bar{\omega} = -1$
 $\textcircled{\tiny \oplus} \omega^2 + \omega + 1 = 0,$
 $\omega^2 + \omega = -1 \rightarrow (\textcircled{\tiny \circ})$

21. $x^3 = 1$ 의 한 허근을 ω 라고 할 때, $(\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8$ 의 값은?

① 0

② 1

③ -1

④ ω

⑤ $-\omega$

해설

$$\begin{aligned}x^3 - 1 = 0 &\Rightarrow (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0 \\ \Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \\ \Rightarrow (\omega^2 + 1)^4 + (\omega^2 + 1)^8 &= (-\omega)^4 + (-\omega)^8 \\ &= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2 \\ &= \omega^2 + \omega = -1\end{aligned}$$

22. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω 라 할 때, 다음 중 틀린 것은?

- ① $\omega^2 + \omega + 1 = 0$
- ② $\omega^3 = 1$
- ③ 1의 세제곱근은 1, ω , ω^2 으로 나타낼 수 있다.
- ④ $\omega^2 = \bar{\omega}$ (단, $\bar{\omega}$ 는 ω 의 켤레복소수이다.)
- ⑤ $\omega = -\omega^2$

해설

$x^3 = 1 \Rightarrow$
 $(x-1)(x^2+x+1) = 0$
 $\therefore \omega^2 + \omega + 1 = 0, \omega^3 = 1 \dots \textcircled{1}, \textcircled{2}$
 $x = 1, \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$
 $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 를 ω 라 하면 $\dots \textcircled{3}$
 $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = \bar{\omega} \dots \textcircled{4}$
 $\omega = -1 - \omega^2 \dots \textcircled{5}$ (거짓)