1. $x^4-5x^2-14=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\beta^2$의 값을 구하면?

① 4　　② -4　　③ 8　　④ -8　　⑤ -16

해설

$x^4-5x^2-14=(x^2+2)(x^2-7)=0$이므로

두 허근 α, β는

각각 $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$이므로

$\alpha^2+\beta^2=-2-2=-4$

2. 다음 중 사차방정식 $x^4 + x^2 + 1 = 0$의 근에 해당하는 것을 모두 고르면?

① $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

④ $1+\sqrt{3}i$ ⑤ $\frac{\sqrt{3}-i}{2}$

해설

$x^4 + x^2 + 1 = 0$을 변형하면

$x^4 + 2x^2 + 1 - x^2 = 0,$

$(x^2+1)^2 - x^2 = 0$

$(x^2+1+x)(x^2+1-x) = 0,$

$x^2 + x + 1 = 0$ 또는 $x^2 - x + 1 = 0$

$\therefore\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ 또는 $x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

3. 다음 중 $1+i$가 하나의 근이며 중근을 갖는 사차방정식은?

① $(x^2-2x+2)(x^2-2x+1)$

② $(x^2-2x+2)(x-1)(x+1)$

③ $(x^2-1)(x^2-2x-1)$

④ $(x^2+1)(x-1)(x+1)$

⑤ $(x^2+1)(x^2-2x+1)$

해설

한 근이 $1+i$이면
다른 한 근은 $1-i$이다.
$\therefore \ \{x-(1+i)\}\{x-(1-i)\}=0$
$\Rightarrow \quad x^2-2x+2=0$
주어진 조건에 맞는 방정식 :
$(x^2-2x+2)(x-\alpha)^2=0$
$\therefore$ ①이 조건에 맞다

4. 삼차방정식 $x^3-5x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 다른 두 근을 구하면? (단, a, b는 유리수)

① $1-\sqrt{2}$, 2　② $-1+\sqrt{2}$, -3　③ $1-\sqrt{2}$, 3

④ $1-\sqrt{2}$, -3　⑤ $-1+\sqrt{2}$, 3

해설

한 근이 $1+\sqrt{2}$이면 다른 한 근은 $1-\sqrt{2}$이다.
삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의해 세근의 합은 5이므로
$\therefore\ 1+\sqrt{2}+(1-\sqrt{2})+\alpha=5,\quad \alpha=3$
$\therefore$ 다른 두 근은 $3, 1-\sqrt{2}$

5. 다음 방정식의 모든 해의 곱을 구하여라.

$$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$$

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$(x^2-2x)(x^2-2x-2)-3=0$ 에서

$x^2-2x=t$ 로 놓으면

$t(t-2)-3=0,$

$t^2-2t-3=0$

$(t-3)(t+1)=0$

$\therefore\ t=3$ 또는 $t=-1$

(i) $t=3$, 즉 $x^2-2x=3$ 일 때

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=3$

(ii) $t=-1$, 즉 $x^2-2x=-1$ 일 때

$x^2-2x+1=0$

$(x-1)^2=0$

$\therefore\ x=1$ (중근)

따라서, $-1\times3\times1=-3$

6. 삼차방정식 $x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 한 근은 $3 + \sqrt{2}$이다. 유리수 p, q의 값을 구했을 때, $p + q$의 값은?

① 6　　② 10　　③ -2　　④ -1　　⑤ 1

해설

$x^3 - 7x^2 + px + q = 0$의 세 근은 $3 + \sqrt{2}, 3 - \sqrt{2}, \alpha$

세 근의 합 : $\alpha + (3 + \sqrt{2}) + (3 - \sqrt{2}) = 7$

$\therefore\ \alpha = 1$

$p = (3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})+\alpha(3-\sqrt{2})+\alpha(3+\sqrt{2}) = 7+6 \quad \therefore\ p = 13$

$-q = (3 + \sqrt{2})(3 - \sqrt{2}) \cdot 1 = 7$

$\therefore\ q = -7$

$\therefore\ p + q = 13 - 7 = 6$

7. x에 대한 삼차방정식 $x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}$일 때, 유리수 a, b의 합 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^3 - ax^2 + 5x - b = 0$ 의 한 근이 $1+\sqrt{2}$ 이므로 다른 한 근을 $1-\sqrt{2}$, 나머지 한 근을 β라 하면

$\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right) + \left(1+\sqrt{2}\right)\beta + \left(1-\sqrt{2}\right)\beta = 5$

$-1 + 2\beta = 5,\ 2\beta = 6 \quad \therefore\ \beta = 3$

따라서, $a = \left(1+\sqrt{2}\right) + \left(1-\sqrt{2}\right) + 3 = 5$

$b = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left(1-\sqrt{2}\right)\cdot 3 = -3$이므로

$a + b = 5 + (-3) = 2$

8. 방정식 $2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$ 을 만족시키는 실수 x, y의 곱 xy를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -4

해설

$2x^2+y^2+2xy-4x+4=0$에서

$(x^2+2xy+y^2)+(x^2-4x+4)=0$

$(x+y)^2+(x-2)^2=0$

x, y가 실수이므로 $x+y=0$, $x-2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=-2$

$\therefore\ xy=-4$

9. 대학수학능력시험 수리탐구 의 문항 수는 30 개 이고 배점은 80 점이다. 문항별 배점은 2 점, 3 점, 4 점 의 세 종류이다. 각 배점 종류별 문항이 적어도 한 문항씩 포함되도록 하려면 2 점짜리 문항은 최소 몇 문항이어야 하는가?

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

2 점 문항 개수를 x, 3 점 문항을 y,
4 점 문항을 z라 하자

$2x + 3y + 4z = 80 \quad \cdots$ ㉠

$x + y + z = 30 \quad \cdots$ ㉡

㉠$-4\times$㉡ $\Rightarrow$ $y = 40 - 2x$

㉠$-3\times$㉡ $\Rightarrow$ $z = x - 10$

$\therefore$ $x = 10$ 이면 $z = 0$

$\Leftarrow$ 조건이 성립하지 않음

$\therefore$ $x \geq 11$, 최소 11 문항

10. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x + \dfrac{1}{x} = a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$의 양변을

x^2 으로 나누면

$$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$$

$x + \dfrac{1}{x} = a$로 치환하면

$x^2 - a - 6 = 0$, $(a-3)(a+2) = 0$

$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$

따라서, 모든 A 의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

11. 방정식 $x^2+2y^2+2xy-4x-10y+13=0$ 을 만족시키는 실수 x, y 의 합 $x+y$ 의 값은?

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

주어진 방정식을 x 에 대하여 내림차순으로 정리하면

$x^2+2(y-2)x+2y^2-10y+13=0 \quad \cdots ㉠$

이 때, x 가 실수이므로 판별식 $\dfrac{D}{4}\geq 0$ 이다.

$\dfrac{D}{4}=(y-2)^2-\left(2y^2-10y+13\right)\geq 0$

$-y^2+6y-9\geq 0,\ y^2-6y+9\leq 0$

$(y-3)^2\leq 0$ y 가 실수이므로 $y-3=0$

$\therefore y=3 \quad \cdots ㉡$

㉡을 ㉠에 대입하면 $x^2+2x+1=0$, $(x+1)^2=0$

$\therefore\ x=-1$

$\therefore\ x+y=-1+3=2$

12. 방정식 $2x^2-4xy+5y^2-8x-4y+20=0$ 을 만족하는 실수 x, y의 값은?

① $x=2,\ y=4$ ② $x=4,\ y=2$ ③ $x=-1,\ y=2$

④ $x=2,\ y=-1$ ⑤ $x=-2,\ y=1$

해설

판별식을 이용하기 위해 준식을 x 에 관하여 정리하면,

$2x^2-4(y+2)x+5y^2-4y+20=0 \cdots$ ①

①이 실근을 가지므로 $\dfrac{D}{4}\geq 0$에서

$4(y+2)^2-10y^2+8y-40\geq 0$

$6y^2-24y+24\leq 0$

$6(y^2-4y+4)\leq 0$

$6(y-2)^2\leq 0$ $\therefore y=2$ ($\because$ y 는 실수)

$y=2$ 를 ①에 대입하면,

$2x^2-16x+32=0,\ \ 2(x-4)^2=0$

$\therefore\ x=4$

13. $a^2+b^2+c^2=12$, $a+b+c=4$ 이 성립할 때, c의 최댓값과 최솟값의 곱은?(단, a, b, c는 실수)

① $-\frac{8}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{8}{3}$ ⑤ 4

해설

$a+b+c=4$

$\Rightarrow \quad b=4-(a+c)$

$a^2+b^2+c^2=12$

$\Rightarrow \quad a^2+c^2+\{4-(a+c)\}^2=12$

a 에 대한 내림차순으로 정리하면

$a^2+(c-4)a+c^2-4c+2=0$

a, b, c 는 실수이므로 판별식이 0 보다 크거나 같다.

$D=(c-4)^2-4(c^2-4c+2)\geq 0$

$\Rightarrow \quad 3c^2-8c-8\leq 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{4-2\sqrt{10}}{3}\leq c\leq\frac{4+2\sqrt{10}}{3}$$

$\therefore$ (최댓값 $\times$ 최솟값)

$$=\left(\frac{4-2\sqrt{10}}{3}\right)\left(\frac{4+2\sqrt{10}}{3}\right)$$

$$=-\frac{8}{3}$$

14. 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$

x, y가 정수이므로

$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$

$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$

$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$

15. $x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근이 정수가 되도록 정수 m의 값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2 + (m-1)x + m + 1 = 0$의 두 근을 α, β라면

$\alpha + \beta = 1 - m \cdots$ ㉠, $\alpha\beta = m + 1 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡을 하면 $\alpha\beta + \alpha + \beta = 2$ (α, β는 정수)

$(\alpha + 1)(\beta + 1) = 3$

$\therefore \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -4 \end{cases}$ 를 ㉡에 대입하면

$m = -1,\ 7$

16. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \cdots ① \\ \alpha\beta = -m + 1 & \cdots ② \end{cases}$$

② −①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore \ (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \ \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

17. 이차방정식 $x^2+(k+1)x+2k+1=0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 양수 k의 값을 구하면?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \geq \beta)$ 라 하면 근과 계수와의 관계에서

$$\begin{cases} \alpha+\beta=-(k+1) & \cdots\cdots ① \\ \alpha\beta=2k+1 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①$\times 2+$②을 하면 $\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=-1$

$\alpha\beta+2\alpha+2\beta+4=3,\quad (\alpha+2)(\beta+2)=3$

$\alpha,\ \beta$ 가 정수이므로 $(\alpha+2,\ \beta+2)=(3,\ 1),\ (-1,\ -3)$

$\therefore\ (\alpha,\ \beta)=(1,\ -1),\ (-3,\ -5)$

①에서

$k=-(\alpha+\beta+1)$ 이므로 $k=-1,\ 7$

$k>0$ 이므로 $k=7$

18. 이차방정식 $x^2+x+1=0$의 서로 다른 두 근을 α,β라 할 때, $(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\ldots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$의 값을 구하면?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

이차방정식 $x^2+x+1=0$의
서로 다른 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로
$\alpha^2+\alpha+1=0,\ \beta^2+\beta+1=0$
또, $\alpha+\beta=-1,\ \alpha\beta=1$
n이 양의 정수일 때,
$\alpha^{n+2}+\alpha^{n+1}+\alpha^n$
$=\alpha^n(\alpha^2+\alpha+1)=0$
$\beta^{n+2}+\beta^{n+1}+\beta^n$
$=\beta^n(\beta^2+\beta+1)=0$이므로
$(\alpha+\beta)+(\alpha^2+\beta^2)+\cdots+(\alpha^{100}+\beta^{100})$
$=\alpha+\{(\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)+\cdots+(\alpha^{98}+\alpha^{99}+\alpha^{100})\}$
$+\beta+\{(\beta^2+\beta^3+\beta^4)+\cdots+(\beta^{98}+\beta^{99}+\beta^{100})\}$
$=\alpha+\beta=-1$

19. 방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 w라고 할 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $w^3 - 1 = 0$
② $w^2 - w + 1 = 0$
③ $w + \frac{1}{w} = -1$
④ $w^{2008} + w^{2009} = -1$
⑤ 다른 허근은 w^2이다.

해설

① $w^3 = 1$이므로 $w^3 - 1 = 0$
② $w^3 - 1 = 0$이므로
$(w-1)(w^2 + w + 1) = 0$
$w - 1 \neq 0$이므로 $w^2 + w + 1 = 0$
$\therefore\ w^2 - w + 1 = -2w \neq 0$
③ $w^2 + w + 1 = 0$이고
$\omega \neq 0$이므로
양변을 w로 나누면 $w + 1 + \frac{1}{w} = 0$
$\therefore\ w + \frac{1}{w} = -1$
④ $\omega^{2008} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega = \omega$,
$\omega^{2009} = (\omega^3)^{669} \cdot \omega^2 = \omega^2$
$\therefore\ w^{2008} + w^{2009} = w + w^2 = -1$
$(\because w^2 + w + 1 = 0)$
⑤ $(w^2)^3 = w^6 = (w^3)^2 = 1^2 = 1$
따라서, w^2은 $x^3 = 1$의 다른 한 허근이다.

20. $x^3-1=0$의 한 허근을 ω라 할 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

㉠ $\omega^6=1$	㉡ $\omega^2=\overline{\omega}$
㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1$	㉣ $\omega^2+\omega=-1$

① ㉠, ㉡ ② ㉠, ㉢ ③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$x^3-1=0$의 한 허근이 ω이므로,

$\omega^3=1,\ (x-1)(x^2+x+1)=0$

$\omega^2+\omega+1=0$ 켤레근 $\overline{\omega}$일 경우도

$\overline{\omega}^3=1,\ \overline{\omega}^2+\overline{\omega}+1=0$

㉠ $\omega^3=1,\ (\omega^3)^2=1 \rightarrow (◯)$

㉢ $\omega+\overline{\omega}=-1,$

$\overline{\omega}=-1-\omega=-(\omega+1)$

$\omega^2+\omega+1$을 이용.

$\omega+1=-\omega^2$이므로 $\overline{\omega}=\omega^2 \rightarrow (◯)$

㉡ 두 근 $\omega, \overline{\omega}$의 합은

$x^2+x+1=0$의 두 근의 합이므로

$\omega+\overline{\omega}=-1$

㉣ $\omega^2+\omega+1=0,$

$\omega^2+\omega=-1 \rightarrow (◯)$

21. $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라고 할 때, $(\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8$의 값은?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ ω ⑤ $-\omega$

해설

$x^3 - 1 = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2+x+1) = 0$

$\Rightarrow \omega^2 + \omega + 1 = 0,\ \omega^3 = 1$

$\Rightarrow (\omega^2+1)^4 + (\omega^2+1)^8 = (-\omega)^4 + (-\omega)^8$

$= \omega^3 \times \omega + (\omega^3)^2 \times \omega^2$

$= \omega^2 + \omega = -1$

22. 1의 세제곱근 중 하나의 허근을 ω라 할 때, 다음 중 <u>틀린</u> 것은?

① $\omega^2+\omega+1=0$

② $\omega^3=1$

③ 1의 세제곱근은 $1,\ \omega,\ \omega^2$으로 나타낼 수 있다.

④ $\omega^2=\overline{\omega}$(단, $\overline{\omega}$는 ω의 켤레복소수이다.)

⑤ $\omega=-\omega^2$

해설

$x^3=1\Rightarrow$

$(x-1)(x^2+x+1)=0$

$\therefore\quad \omega^2+\omega+1=0,\quad \omega^3=1\cdots$①,②

$x=1,\ \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2},\ \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$를 ω라 하면 $\cdots$③

$\omega^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}=\overline{\omega}\cdots$④

$\omega=-1-\omega^2\cdots$⑤(거짓)