1. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2　　② 5　　③ 8　　④ 10　　⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$ 에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$a^2 + b^2 = 5$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$의 그래프가 a의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$과 접할 때, 상수 m, n의 합 $m + n$의 값은?

① -4 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$의 그래프가
직선 $y = mx + n$과 접하므로
$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$
즉, $x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$
$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 성립하므로
$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$
$4m - 8 = 0,\ m^2 + 4n + 4 = 0$에서
두 식을 연립하여 풀면 $m = 2, n = -2$
$\therefore m + n = 0$

3. 유리수 a, b에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$가 두 점 P, Q에서 만난다. 점 P의 x좌표가 $\sqrt{5}+1$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$와 $y = bx$의 교점의 x좌표는
$x^2 - bx - a = 0$의 두 근이다.
$\sqrt{5}+1$이 근이므로, $-\sqrt{5}+1$도 근이다.
근과 계수의 관계에 의해
$b = \sqrt{5}+1 - \sqrt{5}+1 = 2$
$-a = (\sqrt{5}+1)(-\sqrt{5}+1) = -4$
$\therefore\ a = 4 \quad \therefore a+b = 6$

4. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ $\sqrt{2}$　⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.
$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$
$\therefore -2 < a < 2$
$f(a) = (a-1)^2 + 1$
$\therefore\ a = 1$ 일 때, 최솟값 1

5. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x의 범위가 $-2 \le x \le 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 6 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow \quad y = (x-1)^2 - 3$
$-2 \le x \le 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
$x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
$\therefore$ 최댓값 : $(-2-1)^2 - 3 = 6$

6. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3\ (0 \le x \le 3)$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$ 에서
$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,
$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0
최댓값 + 최솟값 $= -4$

7. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

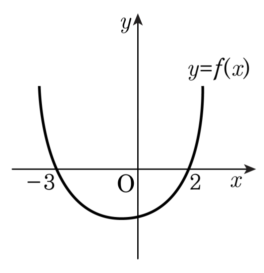
합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

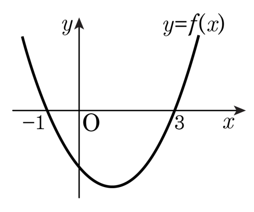


① 1 개　② 2 개　③ 3 개
④ 4 개　⑤ 5 개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3) = 0,\ f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은
(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore\ x = \pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm\sqrt{3}$
(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개이다.

9. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x-1) = 0$ 의 두 근의 합은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 -1, 3 이므로
$f(x) = a(x+1)(x-3)\ (a>0)$ 으로 놓을 수 있다.
이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이므로
$f(2x-1) = 0$ 에서
$4ax(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 근의 합은 2 이다.

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: -2

해설

$y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$

$= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4$

y 의 최솟값 : $m = -\frac{a^2}{2} - 2a - 4$

$= -\frac{1}{2}(a + 2)^2 - 2$

m 의 최댓값 : -2

11. 함수 $y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x\right) - 6$ 에서
$x^2+4x+5 = t$ 로 놓으면
$y = -\left(x^2+4x+5\right)^2 - 2\left(x^2+4x+5\right) + 4$
$= -t^2 - 2t + 4 = -(t+1)^2 + 5$
그런데 $t = x^2+4x+5 = (x+2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로
$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m = -2,\ M = 1$
$\therefore M + m = -1$

12. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18 ② 9 ③ 7 ④ -9 ⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,
$t^2 - 4t + 1 = (t-2)^2 - 3$.
t 의 범위는 x 에 의해 $1 \le t \le 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때},\ y = -3 \\ t = 5\text{일때},\ y = 6 \end{cases}$$

$\therefore\ M \times m = -18$

13. x, y, z가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$의 최솟값은?

① -5 ② -3 ③ -1 ④ 1 ⑤ 3

해설

$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$
$= (x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 1$
이 때, x, y, z가 실수이므로
$(x+1)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0,\ (z-4)^2 \geq 0$
$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$
따라서 $x = -1,\ y = 3,\ z = 4$일 때,
주어진 식의 최솟값은 -1이다.

14. x, y, z가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5$
$= -(x-2)^2 - y^2 - z^2 + 9$
$x,\ y,\ z$는 실수이므로
$(x-2)^2 \ge 0,\ y^2 \ge 0,\ z^2 \ge 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$는
$x - 2 = 0,\ y = 0,\ z = 0$일 때,
최댓값 9를 갖는다.

15. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M이라 할 때, $m+M$의 값은?

① 4　　② 5　　③ 6　　④ 8　　⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2-4x+1}{x^2+2x+3}=y$라 놓고,

양변에 x^2+2x+3을 곱하면

$2x^2-4x+1=y(x^2+2x+3)$

$(y-2)x^2+2(y+2)x+3y-1=0$

x가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4}=(y+2)^2-(y-2)(3y-1)\geq 0$

$2y^2-11y-2\leq 0$

$\therefore \dfrac{11-\sqrt{137}}{4}\leq y\leq \dfrac{11+\sqrt{137}}{4}$

$11<\sqrt{137}<12$이므로

$-0.\times\times\times\leq y\leq 5.\times\times\times$

따라서 $m=0, M=5$이므로 $m+M=5$

16. 가로의 길이와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 100

해설

가로의 길이를 x, 세로의 길이를 $20-x$ 라고 하자.

$y = x \times (20 - x)$
$= -x^2 + 20x$
$= -(x^2 - 20x)$
$= -(x-10)^2 + 100$

따라서 100 이 최댓값이다.

17. 둘레의 길이가 20 cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

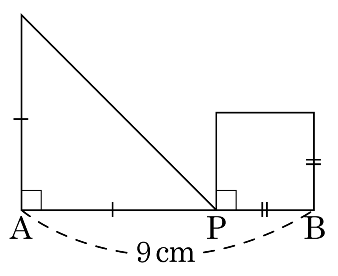
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20-2a) = a(10-a) = -a^2+10a \\ &= -(a^2-10a+25)+25 \\ &= -(a-5)^2+25 \end{aligned}$$

$a=5$, $b=25$

따라서 $a+b=30$ 이다.

18. 길이가 9 cm 인 선분 AB 위에 점 P 를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP 의 길이는?



① 6cm ② 5.5cm ③ 5cm
④ 4.5cm ⑤ 4cm

해설

선분 AP 의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$

따라서 $\overline{\mathrm{AP}} = 6(\mathrm{cm})$ 일 때 넓이가 최소이다.

19. 이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right) x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right) x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x좌표는 이차방정식 $x^2 - \left(a^2 - 4a + 3\right) x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - \left(a^2 - 4a + 4\right) x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$a^2 - 4a + 4 = 0$ 에서 $(a-2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$

$a^2 - 12 < 0$ 에서 $-2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$

$\therefore a = 2$

20. x에 대한 방정식 $|x^2-4x-5|=k$가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는?

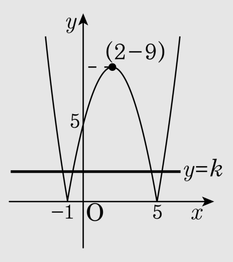
① $0<k<3$　　② $0<k<5$　　③ $3<k<5$

④ $1<k<4$　　⑤ $-2<k<5$

해설

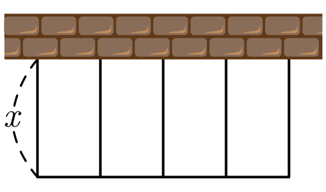
방정식 $|x^2-4x-5|=k$의 실근의 개수는 함수 $y=|x^2-4x-5|$의 그래프와 직선 $y=k$의 교점의 개수와 같다.

$y=|x^2-4x-5|=|(x+1)(x-5)|=|(x-2)^2-9|$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k의 값의 범위는 $0<k<5$

21. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 닭장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 닭장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2　② 160m^2　③ 180m^2　④ 200m^2　⑤ 240m^2

해설

닭장 한 개의 가로의 길이는 $\dfrac{60-5x}{4}$

닭장의 넓이의 합은 $x\left(\dfrac{60-5x}{4}\right)\times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$$\begin{aligned}\therefore -5x^2+60x &= -5(x^2-12x+36)+180\\ &= -5(x-6)^2+180\end{aligned}$$

22. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초 ② 2 초, 4 초 ③ 2 초, 6 초
④ 3 초, 6 초 ⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은
$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80$ 이므로
$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80
따라서 2 초 후이다.
지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.
$0 = -5x^2 + 20x + 60$
$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$
$-5(x-6)(x+2) = 0$
그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$
즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

23. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$가 $-2 \le x \le 2$에서 최댓값 5 , 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$의 값은? (단, a, b는 상수이고 $a < 0$)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$f(x) = ax^2 - 2ax + b$
$= a(x-1)^2 - a + b$ 에서 $a < 0$ 이고
꼭짓점의 x좌표 1이 $-2 \le x \le 2$에 속하므로
$x = 1$일 때 최댓값을 갖고,
$x = -2$일 때 최솟값을 갖는다.
즉, $f(1) = -a + b = 5$, $f(-2) = 8a + b = -4$
두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$
$\therefore a + b = 3$

24. x의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 1　　⑤ $\frac{5}{3}$

해설

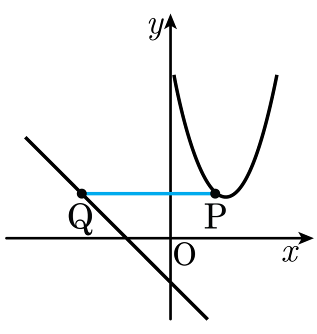
$y = 2x^2 - 8kx = 2(x-2k)^2 - 8k^2$ 이
이참함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
$(2k,\ -8k^2)$ 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하므로 주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $-8k^2 = 10,\ k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은 존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x의 값의 범위에 속하지 않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10,\ 24k = 8$

$\therefore k = \frac{1}{3}$

25. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $\mathrm{P}(a, a^2 - 5a + 8)$
$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $\mathrm{Q}(b,\ -b - 2)$
점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로
$a^2 - 5a + 8 = -b - 2,\ b = -a^2 + 5a - 10$ 이다.
$\overline{\mathrm{PQ}} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a-2)^2 + 6$
$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 최솟값은 6 이다.

26. x 가 정수일 때, $y = 2x^2 - 3x + 6$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$y = 2x^2 - 3x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$

x 가 정수이므로 $x = 1$ 일 때, 최솟값 5 를 갖는다.

27. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ $(-3 \le x \le -1)$ 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$

$= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4}$

(1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f(-3) = 7p + 39 = 0$

$\therefore\ p = -\frac{39}{7}$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

(2) $-3 \le \frac{6+p}{2} \le -1$, 즉, $-12 \le p \le -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$

$p^2 - 4p - 12 = 0$

$(p+2)(p-6) = 0$

$\therefore\ p = -2$ 또는 6

그런데 $-12 \le p \le -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

(3) $\frac{6+p}{2} \ge -1$, 즉, $p \ge -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$\therefore\ p = -\frac{19}{5}$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.