

1. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x 축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b 는 실수)

① 2

② 5

③ 8

④ 10

⑤ 13

해설

$$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$$

$$\therefore (a + 2)^2 + 2(b - 1)^2 = 0$$

이 때, a, b 가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$ 이므로

$$a^2 + b^2 = 5$$

2. 이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가 a 의 값에 관계없이 직선 $y = mx + n$ 과 접할 때, 상수 m, n 의 합 $m + n$ 의 값은?

① -4

② -2

③ -1

④ 0

⑤ 2

해설

이차함수 $y = x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1$ 의 그래프가
직선 $y = mx + n$ 과 접하므로

$$x^2 - 2ax + a^2 + 2a - 1 = mx + n$$

$$\text{즉, } x^2 - (2a + m)x + a^2 + 2a - n - 1 = 0$$

$$\therefore 4am + m^2 - 8a + 4n + 4 = 0$$

이 식이 a 의 값에 관계없이 성립하므로

$$(4m - 8)a + (m^2 + 4n + 4) = 0$$

$$4m - 8 = 0, m^2 + 4n + 4 = 0 \text{에서}$$

$$\text{두 식을 연립하여 풀면 } m = 2, n = -2$$

$$\therefore m + n = 0$$

3. 유리수 a, b 에 대하여 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 가 두 점 P, Q 에서 만난다. 점 P 의 x 좌표가 $\sqrt{5} + 1$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하면?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

두 곡선 $y = x^2 - a$ 와 $y = bx$ 의 교점의 x 좌표는 $x^2 - bx - a = 0$ 의 두 근이다.

$\sqrt{5} + 1$ 이 근이므로, $-\sqrt{5} + 1$ 도 근이다.

근과 계수의 관계에 의해

$$b = \sqrt{5} + 1 - (-\sqrt{5} + 1) = 2$$

$$-a = (\sqrt{5} + 1)(-\sqrt{5} + 1) = -4$$

$$\therefore a = 4 \quad \therefore a + b = 6$$

4. 이차함수 $y = x^2 - ax + 1$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, $f(a) = a^2 - 2a + 2$ 의 최솟값은?

① 1

② 2

③ 3

④ $\sqrt{2}$

⑤ 5

해설

x 축과 만나지 않으려면
판별식이 0 보다 작아야 한다.

$$\Rightarrow D = a^2 - 4 < 0$$

$$\therefore -2 < a < 2$$

$$f(a) = (a - 1)^2 + 1$$

$\therefore a = 1$ 일 때, 최솟값 1

5. 다음 이차함수 $y = x^2 - 2x - 2$ 의 x 의 범위가 $-2 \leq x \leq 2$ 일 때, 이 함수의 최댓값은?

① -3

② -2

③ 0

④ 6

⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2x - 2 \Rightarrow y = (x - 1)^2 - 3$
 $-2 \leq x \leq 2$ 이므로 $x = 1$ 에서 최솟값,
 $x = -2$ 에서 최댓값을 갖는다.
 $\therefore$ 최댓값 : $(-2 - 1)^2 - 3 = 6$

6. 이차함수 $y = x^2 - 2x - 3$ ($0 \leq x \leq 3$) 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = x^2 - 2x - 3 = (x - 1)^2 - 4 \text{ 에서}$$

$x = 1$ 일 때 최솟값 : -4,

$x = 3$ 일 때 최댓값 : 0

$$\text{최댓값} + \text{최솟값} = -4$$

7. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11

② 21

③ 25

④ 81

⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18 - x)$ 이다.

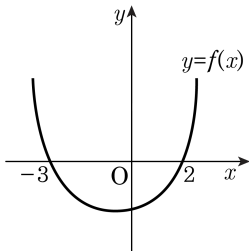
$$y = x(18 - x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$$

$$y = -(x - 9)^2 + 81$$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

8. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?

- ① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개
④ 4 개 ⑤ 5 개



해설

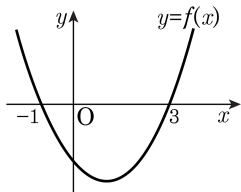
주어진 그래프에서 $f(-3) = 0$, $f(2) = 0$ 이므로
방정식 $f(x^2 - 1) = 0$ 의 근은

(i) $x^2 - 1 = -3$ 일 때, $x^2 = -2 \quad \therefore x = \pm \sqrt{2}i$

(ii) $x^2 - 1 = 2$ 일 때, $x^2 = 3 \quad \therefore x = \pm \sqrt{3}$

(i), (ii) 에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2 개 이다.

9. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f(2x - 1) = 0$ 의 두 근의 합은?



- ① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

해설

$y = f(x)$ 의 그래프와 x 축의 교점의 x 좌표가 $-1, 3$ 이므로
 $f(x) = a(x+1)(x-3)$ ($a > 0$)으로 놓을 수 있다.

이때, $f(2x-1) = a(2x-1+1)(2x-1-3) = 4ax(x-2)$ 이
므로

$$f(2x-1) = 0 \text{ 에서}$$

$$4ax(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0 \text{ 또는 } x = 2$$

따라서 두 근의 합은 2이다.

10. 이차함수 $y = 2x^2 - 2ax - 2a - 4$ 의 최솟값을 m 이라고 할 때, m 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$$\begin{aligned}y &= 2x^2 - 2ax - 2a - 4 \\&= 2\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{2} - 2a - 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y \text{ 의 최솟값 : } m &= -\frac{a^2}{2} - 2a - 4 \\&= -\frac{1}{2}(a+2)^2 - 2\end{aligned}$$

m 의 최댓값 : -2

11. 함수 $y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 이 $x = m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$ 에서

$x^2 + 4x + 5 = t$ 로 놓으면

$$y = -(x^2 + 4x + 5)^2 - 2(x^2 + 4x) - 6$$

$$= -t^2 - 2t + 4 = -(t + 1)^2 + 5$$

그런데 $t = x^2 + 4x + 5 = (x + 2)^2 + 1 \geq 1$ 이므로

$t = 1$, 즉 $x = -2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.

따라서, $m = -2$, $M = 1$

$$\therefore M + m = -1$$

12. $-1 \leq x \leq 1$ 에서 함수 $y = (x^2 - 2x + 2)^2 - 4(x^2 - 2x + 2) + 1$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M \times m$ 의 값은?

① 18

② 9

③ 7

④ -9

⑤ -18

해설

$(x^2 - 2x + 2) = t$ 로 치환하면,

$$t^2 - 4t + 1 = (t - 2)^2 - 3.$$

t 의 범위는 x 에 의해 $1 \leq t \leq 5$ 가 된다.

$$\begin{cases} t = 2\text{일때, } y = -3 \\ t = 5\text{일때, } y = 6 \end{cases}$$

$$\therefore M \times m = -18$$

13. x, y, z 가 실수일 때, $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$ 의 최솟값은?

① -5

② -3

③ -1

④ 1

⑤ 3

해설

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25$$

$$= (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z - 4)^2 - 1$$

이 때, x, y, z 가 실수이므로

$$(x + 1)^2 \geq 0, (y - 3)^2 \geq 0, (z - 4)^2 \geq 0$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y - 8z + 25 \geq -1$$

따라서 $x = -1, y = 3, z = 4$ 일 때,

주어진 식의 최솟값은 -1이다.

14. x, y, z 가 실수일 때, 다음 식의 최댓값을 구하여라.

$$4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$$

▶ 답 :

▷ 정답 : 9

해설

$$\begin{aligned} & 4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x^2 - 4x) - y^2 - z^2 + 5 \\ &= -(x - 2)^2 - y^2 - z^2 + 9 \end{aligned}$$

x, y, z 는 실수이므로
 $(x - 2)^2 \geq 0, y^2 \geq 0, z^2 \geq 0$
따라서 $4x - x^2 - y^2 - z^2 + 5$ 는
 $x - 2 = 0, y = 0, z = 0$ 일 때,
최댓값 9를 갖는다.

15. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m , 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

① 4

② 5

③ 6

④ 8

⑤ 9

해설

$$\frac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y \text{라 놓고,}$$

양변에 $x^2 + 2x + 3$ 을 곱하면

$$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$$

$$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$$

x 가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$$

$$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$$

$$\therefore \frac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \frac{11 + \sqrt{137}}{4}$$

$$11 < \sqrt{137} < 12 \text{이므로}$$

$$-0. \times \times \times \leq y \leq 5. \times \times \times$$

따라서 $m = 0, M = 5$ 이므로 $m + M = 5$

16. 가로와 세로의 길이의 합이 20 인 직사각형의 넓이를 y 라고 할 때, y 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 100

해설

가로의 길이를 x , 세로의 길이를 $20 - x$ 라고 하자.

$$\begin{aligned}y &= x \times (20 - x) \\&= -x^2 + 20x \\&= -(x^2 - 20x) \\&= -(x - 10)^2 + 100\end{aligned}$$

따라서 100이 최댓값이다.

17. 둘레의 길이가 20cm 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이가 최대가 되도록 하는 부채꼴의 반지름을 a , 이때 부채꼴의 넓이를 b 라 할 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 30

해설

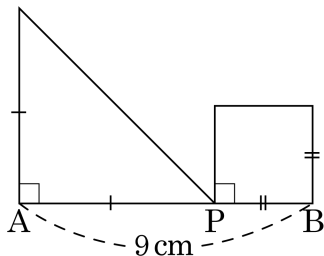
부채꼴의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}a(20 - 2a) = a(10 - a) = -a^2 + 10a \\ &= -(a^2 - 10a + 25) + 25 \\ &= -(a - 5)^2 + 25 \end{aligned}$$

$$a = 5, b = 25$$

따라서 $a + b = 30$ 이다.

18. 길이가 9cm 인 선분 AB 위에 점 P를 잡아서 다음 그림과 같이 직각이등변삼각형과 정사각형을 만들어 넓이의 합이 최소가 되게 할 때, 선분 AP의 길이는?



① 6cm

② 5.5cm

③ 5cm

④ 4.5cm

⑤ 4cm

해설

선분 AP의 길이를 x 라 하고 직각이등변삼각형과 정사각형의 넓이의 합을 S 라 하면

$$S = \frac{1}{2}x^2 + (9-x)^2 = \frac{3}{2}(x-6)^2 + 27$$

따라서 $\overline{AP} = 6$ (cm) 일 때 넓이가 최소이다.

19. 이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 이 서로 다른 두 점에서 만나고, 두 교점이 원점에 대하여 대칭일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

이차함수 $y = x^2 - (a^2 - 4a + 3)x$ 의 그래프와 직선 $y = x + 12 - a^2$ 의 교점의 x 좌표는 이차방정식 $x^2 - (a^2 - 4a + 3)x = x + 12 - a^2$

즉, $x^2 - (a^2 - 4a + 4)x + a^2 - 12 = 0$ 의 두 근이다.

그런데 두 교점이 원점에 대하여 대칭이므로 위의 이차방정식의 두 근의 합은 0이고, 두 근의 곱은 음이다.

따라서, 근과 계수의 관계에 의하여

$$a^2 - 4a + 4 = 0 \text{ 에서 } (a - 2)^2 = 0 \quad \therefore a = 2$$

$$a^2 - 12 < 0 \text{ 에서 } -2\sqrt{3} < a < 2\sqrt{3}$$

$$\therefore a = 2$$

20. x 에 대한 방정식 $|x^2 - 4x - 5| = k$ 가 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는?

① $0 < k < 3$

② $0 < k < 5$

③ $3 < k < 5$

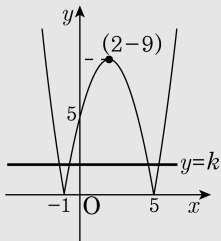
④ $1 < k < 4$

⑤ $-2 < k < 5$

해설

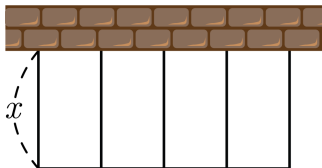
방정식 $|x^2 - 4x - 5| = k$ 의 실근의 개수는 함수 $y = |x^2 - 4x - 5|$ 의 그래프와 직선 $y = k$ 의 교점의 개수와 같다.

$$y = |x^2 - 4x - 5| = |(x+1)(x-5)| = |(x-2)^2 - 9|$$



따라서 주어진 방정식이 양의 근 두 개와 음의 근 두 개를 갖도록 하는 실수 k 의 값의 범위는 $0 < k < 5$

21. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 담장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 담장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2

② 160m^2

③ 180m^2

④ 200m^2

⑤ 240m^2

해설

담장 한 개의 가로 길이는 $\frac{60-5x}{4}$

담장의 넓이의 합은 $x \left(\frac{60-5x}{4} \right) \times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$$\begin{aligned} \therefore -5x^2 + 60x &= -5(x^2 - 12x + 36) + 180 \\ &= -5(x-6)^2 + 180 \end{aligned}$$

22. 지면으로부터 60m 높이에서 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 y m 라 하면 $y = -5x^2 + 20x + 60$ 인 관계가 있다. 최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간과 지면에 다시 떨어질 때까지 걸리는 시간을 각각 구하면?

① 1 초, 3 초

② 2 초, 4 초

③ 2 초, 6 초

④ 3 초, 6 초

⑤ 3 초, 8 초

해설

최고 높이에 도달할 때까지 걸린 시간은

$$y = -5x^2 + 20x + 60 = -5(x-2)^2 + 80 \text{ 이므로}$$

$x = 2$ 일 때 y 의 최댓값은 80

따라서 2 초 후이다.

지면에 떨어질 때 $y = 0$ 이다.

$$0 = -5x^2 + 20x + 60$$

$$-5(x^2 - 4x - 12) = 0$$

$$-5(x-6)(x+2) = 0$$

그런데, $x > 0$ 이므로 $x = 6$

즉, 6 초 후에 지면에 떨어진다.

23. 함수 $f(x) = ax^2 - 2ax + b$ 가 $-2 \leq x \leq 2$ 에서 최댓값 5, 최솟값 -4를 가질 때, $a + b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수이고 $a < 0$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$f(x) = ax^2 - 2ax + b$$

$$= a(x-1)^2 - a + b \text{ 에서 } a < 0 \text{ 이고}$$

꼭짓점의 x 좌표 1이 $-2 \leq x \leq 2$ 에 속하므로

$x = 1$ 일 때 최댓값을 갖고,

$x = -2$ 일 때 최솟값을 갖는다.

$$\text{즉, } f(1) = -a + b = 5, f(-2) = 8a + b = -4$$

두 식을 연립하여 풀면 $a = -1, b = 4$

$$\therefore a + b = 3$$

24. x 의 값의 범위가 $x \geq 3$ 인 이차함수 $y = 2x^2 - 8kx$ 의 최솟값이 10 일 때, 상수 k 의 값은?

① -1

② $-\frac{1}{3}$

③ $\frac{1}{3}$

④ 1

⑤ $\frac{5}{3}$

해설

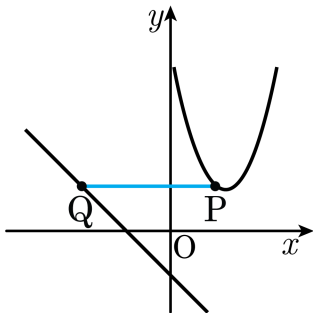
$y = 2x^2 - 8kx = 2(x - 2k)^2 - 8k^2$ 이
이차함수의 그래프의 꼭짓점의 좌표는
($2k, -8k^2$) 이다.

(i) $2k \geq 3$ 일 때, 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하므로
주어진 이차함수는 $x = 2k$ 일 때 최솟값을 갖는다. 최솟값
이 10 이므로 $-8k^2 = 10$, $k^2 = -\frac{5}{4}$ 이 때, 실수 k 의 값은
존재하지 않는다.

(ii) $2k < 3$ 일 때 꼭짓점의 x 좌표가 x 의 값의 범위에 속하지
않으므로 주어진 이차함수는 $x = 3$ 일 때 최솟값을 갖는다.
최솟값이 10 이므로 $18 - 24k = 10$, $24k = 8$

$$\therefore k = \frac{1}{3}$$

25. 다음 그림에서 포물선 $y = x^2 - 5x + 8$ 위의 한 점 P 와 직선 $y = -x - 2$ 위의 한 점 Q 에 대하여 $\overline{PQ}$ 가 x 축에 평행할 때, $\overline{PQ}$ 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = x^2 - 5x + 8$ 에서 점 P 의 좌표는 $P(a, a^2 - 5a + 8)$

$y = -x - 2$ 에서 점 Q 의 좌표는 $Q(b, -b - 2)$

점 P 와 점 Q 의 y 좌표가 같으므로

$$a^2 - 5a + 8 = -b - 2, \quad b = -a^2 + 5a - 10 \text{ 이다.}$$

$$\overline{PQ} = a - b = a^2 - 4a + 10 = (a - 2)^2 + 6$$

$\overline{PQ}$ 의 최솟값은 6 이다.

26. x 가 정수일 때, $y = 2x^2 - 3x + 6$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$$y = 2x^2 - 3x + 6 = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{39}{8}$$

x 가 정수이므로 $x = 1$ 일 때, 최솟값 5 를 갖는다.

27. 이차함수 $f(x) = x^2 - (6+p)x + 4p + 12$ ($-3 \leq x \leq -1$) 의 최솟값이 0 일 때, p 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $-\frac{19}{5}$

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (6+p)x + 4p + 12 \\ &= \left(x - \frac{6+p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4p - 12}{4} \end{aligned}$$

- (1) $\frac{6+p}{2} < -3$, 즉, $p < -12$ 인 경우

$x = -3$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f(-3) = 7p + 39 = 0$$

$$\therefore p = -\frac{39}{7}$$

그런데 $p < -12$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값은 존재하지 않는다.

- (2) $-3 \leq \frac{6+p}{2} \leq -1$, 즉, $-12 \leq p \leq -8$ 인 경우

$x = \frac{6+p}{2}$ 일 때, 최솟값이 0 이므로

$$f\left(\frac{6+p}{2}\right) = 0$$

$$p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$(p+2)(p-6) = 0$$

$$\therefore p = -2 \text{ 또는 } 6$$

그런데 $-12 \leq p \leq -8$ 이므로 주어진 조건을 만족하는 p 값이 존재하지 않는다.

- (3) $\frac{6+p}{2} \geq -1$, 즉, $p \geq -8$ 인 경우

$x = -1$ 일 때, 최솟값이 0 이므로 $f(-1) = 0$

$$\therefore p = -\frac{19}{5}$$

따라서 (1), (2), (3) 에서 $p = -\frac{19}{5}$ 이다.