1. x에 관한 삼차식 x^3+mx^2+nx+1을 $x+1$로 나누면 나머지가 5이고, $x-2$로 나누면 나누어떨어진다고 한다. 이 때, $-3(m+n)$의 값은?

① 4　② 8　③ 12　④ 14　⑤ 18

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x+1)Q(x)+5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3+mx^2+nx+1 \\ &= (x-2)Q'(x) \end{aligned}$$

$\therefore f(-1) = -1+m-n+1 = 5$

$f(2) = 8+4m+2n+1 = 0$

$\therefore m = \frac{1}{6},\ n = -\frac{29}{6}$

$\therefore m+n = -\frac{14}{3},\ -3(m+n) = 14$

2. 다항식 $x^3 + ax^2 + bx - 1$ 이 $x^2 - 3x + 2$ 로 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$ 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 1$ 로 놓으면
$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1) = 1 + a + b - 1 = 0$ 즉, $a + b = 0 \cdots$ ㉠
$f(2) = 8 + 4a + 2b - 1 = 0$ 즉, $4a + 2b = -7 \cdots$ ㉡
㉠, ㉡으로부터 $a = -\frac{7}{2}$, $b = \frac{7}{2}$
$\therefore a + b = 0$

3. x^2-2x-y^2+2y를 인수분해하였더니, $(x+ay)(x-by+c)$가 되었다. 이 때, a, b, c를 순서대로 쓴 것은?

① $-1,\ 0,\ 1$　② $-1,\ 1,\ 2$　③ $-2,\ -1,\ 1$
④ $-1,\ -1,\ -2$　⑤ $-1,\ 2$

해설

$$\begin{aligned} x^2-2x-y^2+2y &= (x+y)(x-y)-2(x-y) \\ &= (x-y)(x+y-2) \end{aligned}$$

$\therefore\ a=-1,\ b=-1,\ c=-2$

4. 등식 $\frac{a}{1+i}+\frac{b}{1-i}=-5$를 만족하는 두 실수 $a+b$의 값을 구하시오 (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▷ 정답: -10

해설

주어진 식의 양변에 $(1+i)(1-i)$를 곱하면

$a(1-i)+b(1+i)=-10$, $(a+b)+(b-a)i=-10$

$\therefore a+b=-10$, $b-a=0$

5. 이차방정식 $x^2+2x+2-a=0$ 이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 a 의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a \geq 1$ ③ $-1<a<1$
④ $a>1$ ⑤ $a \geq -1$

해설
$x^2+2x+2-a=0$ 이
서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는
판별식 $D>0$ 이어야 한다.
$\frac{D}{4}=1-(2-a)>0$
$1-2+a>0$
$\therefore\ a>1$

6. 이차함수 $y = x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6$ 의 그래프가 x축에 접할 때, $a^2 + b^2$ 의 값은? (단, a, b는 실수)

① 2 ② 5 ③ 8 ④ 10 ⑤ 13

해설

$x^2 - 2ax - 2b^2 - 4a + 4b - 6 = 0$에서

$\frac{D}{4} = a^2 - (-2b^2 - 4a + 4b - 6) = 0$

$\therefore (a+2)^2 + 2(b-1)^2 = 0$

이 때, a, b가 실수이므로 $a + 2 = 0, b - 1 = 0$

따라서 $a = -2, b = 1$이므로

$a^2 + b^2 = 5$

7. 다음 이차함수 중 최댓값을 갖는 것은?

① $y = x^2 + x - 1$

② $y = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 1$

③ $y = \frac{1}{5}x^2 + 4$

④ $y = -x^2 - 2x + 1$

⑤ $y = \frac{3}{4}(x+1)^2$

해설

이차항의 계수가 음수인 것을 찾는다.

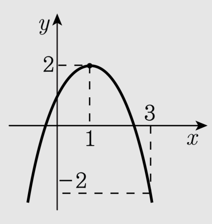
8. x의 범위가 $0 \leq x \leq 3$ 일 때, 이차함수 $y = -x^2 + 2x + 1$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. 이 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$y = -x^2 + 2x + 1 = -(x-1)^2 + 2$
이므로 오른쪽 그림에서 주어진 이차함수는 $x = 1$ 일 때, 최댓값 2, $x = 3$ 일 때, 최솟값 -2를 가짐을 알 수 있다.
$\therefore\ M + m = 2 + (-2) = 0$



9. 다음 식을 전개한 것 중 옳은 것을 고르면?

① $(x-y-z)^2 = x^2 - y^2 - z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$

② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 18xy^2 - 8y^3$

③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy-y^2)(x^2-xy+y^2) = x^9 - y^9$

④ $(x^2-2xy+2y^2)(x^2+2xy+2y^2) = x^4 + 4y^4$

⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+2x+2y+1) = x^3 + y^3 - 3xy - 1$

해설

① $(x-y-z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2yz - 2zx$
② $(3x-2y)^3 = 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3$
③ $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$
$= x^6 - y^6$
⑤ $(x+y-1)(x^2+y^2-xy+x+y+1)$
$= x^3 + y^3 - 3xy - 1$

10. 두 다항식 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$, $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 x^3 의 계수를 각각 a, b 라 할 때, $a-b$ 의 값을 구하면?

① -21　② -15　③ -5　④ -1　⑤ 0

해설

$(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서
x^4 항의 계수는 x^3 의 계수와는 관계가 없다.
따라서 $(1+2x+3x^2+4x^3)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수와 $(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)^3$ 의 전개식에서 x^3 의 계수는 같다.
$\therefore\ a=b \quad \therefore\ a-b=0$

11. 다음 보기 중 항상 옳다고 할 수 없는 등식은?

㉠ $x^2 + y^2 + z^2 = (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx)$
㉡ $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy$
㉢ $(x^2 + x + 1)(x^2 - x - 1) = x^4 + x + 1$
㉣ $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$
㉤ $(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

① ㉠　② ㉡　③ ㉢　④ ㉣　⑤ ㉤

해설

㉢ $x + 1 = A$로 치환하여 전개하면
$(x^2 + A)(x^2 - A) = x^4 - A^2 = x^4 - x^2 - 2x - 1$

12. 가로의 길이가 $x$cm, 세로의 길이가 y cm, 높이가 $z$cm 인 직육면체에서 $x+y+z=10,\ x^2+y^2+z^2=46$ 일 때, 이 직육면체의 겉넓이는 몇 cm^2 인가?

① $45\,\mathrm{cm}^2$　② $50\,\mathrm{cm}^2$　③ $54\,\mathrm{cm}^2$

④ $58\,\mathrm{cm}^2$　⑤ $60\,\mathrm{cm}^2$

해설

공식 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ 을 이용하여
주어진 조건을 대입하면 $xy+yz+zx=27$
겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$ 이므로 54

13. 차수가 같은 두 다항식의 합이 $2x^2 - 8$이고, 최소공배수가 $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$일 때, 두 다항식의 최대공약수는 $ax + b$이다. 이 때, $a + b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

두 식 A, B의 최대공약수를 G라 하면

$A = Ga, B = Gb$(a, b는 서로소)

$A + B = (a + b)G = 2(x + 2)(x - 2)$

$L = abG = (x - 1)(x - 3)(x + 2)$

$\therefore\ G = x + 2$

14. 다음 계산을 하시오.

$$1+\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\cdots+\frac{1}{i^{2006}}$$

▶ 답 :

▷ 정답 : $-i$

해설

$i^4=1$이므로

$\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^4$

$=\left(\frac{1}{i}\right)^5+\left(\frac{1}{i}\right)^6+\left(\frac{1}{i}\right)^7+\left(\frac{1}{i}\right)^8\cdots$

$=\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^4$

$=-i-1+i+1=0$

$\therefore$ (준식) $=1+(0+0+\cdots+0)+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^2$

$=1-i-1=-i$

15. 이차방정식 $2[x]^2+3[x]+1=0$의 해를 구하여라. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-1 \le x < 0$ ② $-1 \le x < 1$ ③ $-1 \le x < 2$
④ $0 \le x < 1$ ⑤ $0 \le x < 2$

해설

$2[x]^2+3[x]+1=([x]+1)(2[x]+1)=0$이므로

$[x]=-1$ 또는 $[x]=-\frac{1}{2}$

그런데 $[x]$은 정수이므로 $[x]=-1$

$\therefore -1 \le x < 0$

16. 이차방정식 $x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2일 때, 다른 한 근을 구하여라. (단, m은 상수)

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 - x + m = 0$의 한 근이 2이므로
$x = 2$를 대입하면
$2^2 - 2 + m = 0 \quad \therefore m = -2$
따라서 주어진 방정식은 $x^2 - x - 2 = 0$이다.
이 방정식을 풀면
$(x - 2)(x + 1) = 0$에서 $x = 2$ 또는 $x = -1$
이므로 다른 한 근은 -1이다.

17. 이차함수 $y=-x^2+ax$ 의 최댓값이 4 일 때, 상수 a 의 값을 구하여라.
(단, $a>0$)

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=4$

해설

$y=-x^2+ax=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}$

$x=\frac{a}{2}$ 일 때, 최댓값이 $\frac{a^2}{4}$ 이므로

$\frac{a^2}{4}=4$, $a=\pm4$

$a>0$ 이므로 $a=4$ 이다.

18. $a=(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)\cdots(3^{1024}+1)$이라고 할 때 곱셈 공식을 이용하여 a의 값을 지수의 형태로 나타내면 $\frac{1}{k}(3^l+m)$이다. 이 때, $k+l+m$의 값을 구하면?

① 2046 ② 2047 ③ 2048 ④ 2049 ⑤ 2050

해설

$a=(3+1)\left(3^2+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$

양변에 $(3-1)$을 곱하면

$$(3-1)\,a=(3-1)(3+1)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)$$

$$\begin{aligned}2a&=\left(3^2-1\right)\left(3^2+1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^4-1\right)\left(3^4+1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&=\left(3^8-1\right)\cdots\left(3^{1024}+1\right)\\&\;\;\vdots\\&=\left(3^{2048}-1\right)\end{aligned}$$

양변을 2로 나누면

$a=\frac{1}{2}\left(3^{2048}-1\right)$

$\therefore\ k=2,\ l=2048,\ m=-1$

$\therefore\ k+l+m=2049$

19. $y = kx^2 + (1-2k)x + k - 1$의 그래프는 k에 관계없이 항상 한 정점 A를 지난다. B의 좌표를 $\mathrm{B}(b, 1)$라 할 때, $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 $\sqrt{2}$가 되도록 하는 b의 값들의 합을 구하면?

① 1　　② 2　　③ -2　　④ -3　　⑤ -1

해설

(ⅰ) 준식을 k에 관하여 정리하면

$(x^2 - 2x + 1)k + (x - y - 1) = 0$

이 식이 k의 값에 관계없이 성립할 조건은

$x^2 - 2x + 1 = 0,\ x - y - 1 = 0$

$\therefore\ x = 1,\ y = 0$

$\therefore\ A(1, 0)$

(ⅱ) $\mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(b, 1)$에서

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}$이므로

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(b-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

$b^2 - 2b = 0, \quad b(b-2) = 0 \quad \therefore\ b = 0,\ 2$

$\therefore\ b$의 값들의 합은 2

20. $z = \dfrac{1+i}{1-i}$ 일 때, $1 + z + z^2 + \cdots + z^{2008}$ 의 값은?

① $-i$　　② -1　　③ 0　　④ i　　⑤ 1

해설

$z = \dfrac{1+i}{1-i} = i, z^2 = -1,\ z^3 = -i,\ z^4 = 1$

(준식) : $1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

처음 네 항의 합 :

$1 + i - 1 - i = 0$

$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^{2008}$

$= 0 + 0 + \cdots + 0 + z^{2008}$

$= z^{2008}$

$= (z^4)^{502}$

$= 1$

21. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 13

해설

$\alpha,\ \beta$가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①

$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②

①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$

②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$

$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$

$=3\alpha\cdot 3\beta$

$=9\alpha\beta$

$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

22. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1　② 1　③ 3　④ 5　⑤ 7

해설

계수가 실수이므로
$\alpha = p+qi$ 이면 $\beta = p-qi$ $(q \neq 0)$
$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로
$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서
$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$
$\therefore p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$
$q \neq 0$이므로
$p=1,\ q^2=2$
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$
$\therefore\ x^2-2x+3=0$
$\therefore\ b=-2,\ c=3$
$\therefore\ b+c=1$

23. n이 자연수일 때, 다항식 $x^{2n}(x^2+ax+b)$를 $(x-3)^2$으로 나누었을 때의 나머지가 $9^n(x-3)$이 될 때, $a+b$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x^{2n}(x^2+ax+b)=(x-3)^2Q(x)+9^n(x-3)$

$x^{2n}(x-3)(x-\alpha)=(x-3)\,(x-3)Q(x)+9^n\}$ 라 놓으면,

$x^{2n}(x-\alpha)=(x-3)Q(x)+9^n$ 이고

양변에 $x=3$을 대입하면, $9^n(3-\alpha)=9^n$

$\therefore\ 3-\alpha=1,\quad \alpha=2$

그러므로 $a=-5,\ b=6$이 된다.

따라서 $a+b=1$

24. 다항식 $f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$, $Q_1(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_2(x)$라 한다. 이와 같은 과정을 계속할 때, $Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_{n+1}(x)$라 한다. $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 할 때, $R(\alpha)$의 값은?

① 0　② α　③ $f(\alpha)$

④ $Q_n(\alpha)$　⑤ $Q_{n+1}(\alpha)$

해설

$f(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 몫을 $Q_1(x)$,
나머지를 R_1이라 하면
$f(x) = (x-\alpha)Q_1(x) + R_1$에서
$Q_n(x)$를 $x-\alpha$로 나눈 나머지를 R_{n+1}이라 하면

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (x-\alpha)\{(x-\alpha)Q_2(x) + R_2\} + R_1 \\
&= (x-\alpha)^2Q_2(x) + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&= (x-\alpha)^2\{(x-\alpha)Q_3(x) + R_3\} + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&= (x-\alpha)^3Q_3(x) + (x-\alpha)^2R_3 + (x-\alpha)R_2 + R_1 \\
&\ \ \vdots \\
&= (x-\alpha)^nQ_n(x) + (x-\alpha)^{n-1}R_n + \\
&\qquad \cdots\cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1
\end{aligned}
$$

따라서 $f(x)$를 $(x-\alpha)^n$으로 나눈 나머지를 $R(x)$라 하면
$R(x) = (x-\alpha)^{n-1}R_n + \cdots + (x-\alpha)R_2 + R_1$
$\therefore\ R(\alpha) = R_1 = f(\alpha)$

25. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은?

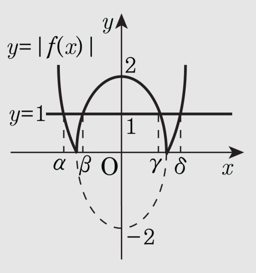
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$|x^2+(a-2)x-2|=1 \Leftrightarrow x^2+(a-2)x-2=\pm 1$
$x^2+(a-2)x-2=1$ 의 두 근을 α,β 라 하면 $\alpha+\beta=-(a-2)$ … ㉠
$x^2+(a-2)x-2=-1$의 두 근을 γ,δ라 하면 $\gamma+\delta=-(a-2)$ … ㉡
㉠+㉡하면 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=-2(a-2)$
모든 근의 합이 0 이므로 $a-2=0$ $\therefore a=2$

해설

$f(x)=x^2+(a-2)x-2$ 라 놓으면 y 절편이 -2 이므로 방정식 $|f(x)|=1$ 의 근을 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ 라 할 때 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ 이기 위해서는 $y=|f(x)|$ 의 그래프는 다음 그림과 같이 y 축에 대하여 대칭이다. (우함수)



$\therefore\ a-2=0,\ a=2$