1. 다음 세 수 $2^a \times 3^5 \times 7^2 \times 150,\ 2^5 \times 3^b \times 5^2 \times 7^3,\ 2^4 \times 5^c \times 7^d \times 54$ 의 최대공약수가 $2^3 \times 3 \times 70$ 일 때, $(a+b+c) \times d$ 의 값은?

① 3 ② 5 ③ 8 ④ 9 ⑤ 12

해설

최대공약수가 $2^3 \times 3 \times 70 = 2^4 \times 3 \times 5 \times 7$ 이고
주어진 각 수를 정리한 값이
$2^a \times 3^5 \times 7^2 \times 150 = 2 \times 2^a \times 3^6 \times 5^2 \times 7^2$
$2^5 \times 3^b \times 5^2 \times 7^3$
$2^4 \times 5^c \times 7^d \times 54 = 2^5 \times 3^3 \times 5^c \times 7^d$ 이다.
주어진 세 수의 2 의 지수를 비교하면 모두 4 보다 크므로
$2 \times 2^a \times 3^6 \times 5^2 \times 7^2$ 에서 2 의 지수는 4 이어야한다.
2 가 한 번 더 곱해져 있으므로, a 는 3 이어야 한다.
주어진 세 수의 3 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 b 는 1 이어야 한다.
주어진 세 수의 5 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 c 는 1 이어야 한다.
주어진 세 수의 7 의 지수를 비교하면
모두 1 보다 크므로 d 는 1이어야 한다.
따라서 $a = 3,\ b = 1, c = 1,\ d = 1$ 이므로
$(a+b+c) \times d = (3+1+1) \times 1 = 5$ 이다.

2. 두 수 $2^3 \times 3^a \times 5$ 와 $2^b \times 3^2 \times 5^2$ 의 최대공약수가 60 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$ 이므로, $a = 1,\ b = 2$

$\therefore\ a + b = 1 + 2 = 3$

3. 두 수 $3^5 \times 5^5 \times 7^c$, $3^a \times 5^b \times 7^6 \times 13^4$ 의 최대공약수가 315 일 때, $a+b-c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

최대공약수가 $315 = 3^2 \times 5 \times 7$ 이고
$3^5 \times 5^5 \times 7^c$ 에서 3 의 지수가 5 이므로
$3^a \times 5^b \times 7^6 \times 13^4$ 에서 3 의 지수가 2 이어야 한다.
같은 방식으로
$3^5 \times 5^5 \times 7^c$ 에서 5 의 지수가 5 이므로
$3^a \times 5^b \times 7^6 \times 13^4$ 에서 5 의 지수가 1 이어야 한다.
또한,
$3^a \times 5^b \times 7^6 \times 13^4$ 에서 7 의 지수가 6 이므로
$3^5 \times 5^5 \times 7^c$ 에서 7 의 지수가 1 이어야 한다.
따라서 $a = 2,\ b = 1, c = 1$
$a+b-c = 2+1-1 = 2$

4. 다음 보기의 수들의 최소공배수를 차례대로 고른 것은?

보기

㉠ $16, 10, 12$
㉡ $8, 6, 12$
㉢ $4, 16, 32$

① $40, 18, 16$　　② $240, 48, 56$　　③ $4, 52, 12$

④ $240, 24, 32$　　⑤ $120, 34, 16$

해설

㉠
$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 16 & 10 & 12 \\ \hline 2 & 8 & 5 & 6 \\ \hline & 4 & 5 & 3 \end{array}$$

최소공배수는 $2 \times 2 \times 4 \times 5 \times 3 = 240$이다.

㉡
$$\begin{array}{r|rrr} 2 & 8 & 6 & 12 \\ \hline 2 & 4 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 2 & 3 & 3 \\ \hline & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

최소공배수는 $2 \times 2 \times 3 \times 2 = 24$이다.

㉢
$$\begin{array}{r|rrr} 4 & 4 & 16 & 32 \\ \hline 4 & 1 & 4 & 8 \\ \hline & 1 & 1 & 2 \end{array}$$

최소공배수는 $4 \times 4 \times 2 = 32$이다.

5. $5\times a$, $3\times a$, $2\times a$ 의 세 자연수의 최소공배수가 330 일 때, a 가 될 수 있는 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 11$

해설

$$\begin{array}{r|ccc} \square & 5\times\square & 3\times\square & 2\times\square \\ \hline & 5 & 3 & 2 \end{array}$$

$5\times3\times2\times a = 330$

$\therefore a = 11$

6. 세 수 $60, 126, 275$ 의 최소공배수를 소인수분해 형태로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$

해설

$$\begin{array}{r|r} 2 & 60 \\ \hline 2 & 30 \\ \hline 3 & 15 \\ \hline & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 2 & 126 \\ \hline 3 & 63 \\ \hline 3 & 21 \\ \hline & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|r} 5 & 275 \\ \hline 5 & 55 \\ \hline & 11 \end{array}$$

$\therefore 60=2^2 \times 3 \times 5$ $\therefore 32=2 \times 3^2 \times 7$ $\therefore 275=5^2 \times 11$

따라서 최소공배수는 $2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 \times 11$ 이다.

7. 가로의 길이가 60cm, 세로의 길이가 50cm 인 벽에 정사각형 모양의 타일을 붙일 때, 남는 부분 없이 되도록 큰 타일을 붙이려면 몇 장의 타일이 필요한지 구하여라.

▶ 답 : ______ 장

▷ 정답 : 30 장

해설

정사각형 타일의 한 변의 길이는 60 과 50 의 최대공약수이므로

$60 = 2^2 \times 3 \times 5$, $50 = 2 \times 5^2$

최대공약수는 $2 \times 5 = 10$

따라서 필요한 타일의 개수는

$(60 \div 10) \times (50 \div 10) = 30$ (장)

8. 천을 가공하는 공장에서 가로, 세로의 길이가 각각 $60\mathrm{cm}, 90\mathrm{cm}$ 인 천을 남는 부분 없이 정사각형 모양의 조각으로 자르려고 한다. 잘려진 조각의 넓이를 가장 크게 하려고 할 때, 한 변의 길이를 구하여라.

▶ **답 :** ______ cm

▷ **정답 :** 30 cm

해설

자르려고 하는 정사각형 모양의 합판의 한 변의 길이는 60 과 90 의 공약수이다.
그런데 잘려진 조각의 넓이를 가장 크게 한다고 했으므로
한 변의 길이는 60 과 90 의 최대공약수이다.

$$\begin{array}{r|rr} 2 & 60 & 90 \\ \hline 3 & 30 & 45 \\ \hline 5 & 10 & 15 \\ \hline & 2 & 3 \end{array}$$

$\therefore 2 \times 3 \times 5 = 30(\mathrm{cm})$

9. 가로의 길이가 90cm, 세로의 길이가 144cm 인 직사각형 모양의 벽에 같은 크기의 정사각형 모양의 타일을 빈틈없이 붙이려고 한다. 가능한 한 큰 타일을 붙이려면 타일의 한 변의 길이는 몇 cm 이어야 하는가? 또, 몇 개의 타일이 필요한가?

① 18cm, 35 개 ② 12cm, 35 개 ③ 18cm, 40 개

④ 12cm, 40 개 ⑤ 15cm, 30 개

해설

타일의 한 변의 길이를 $x$cm 라 할 때,

$90 = x \times \square$, $144 = x \times \triangle$

x 는 90 과 144 의 최대공약수

$90 = 2 \times 3^2 \times 5$, $144 = 2^4 \times 3^2$

$\therefore\ x = 2 \times 3^2 = 18\ (\mathrm{cm})$

$90 = 18 \times 5$, $144 = 18 \times 8$ 이므로

필요한 타일의 개수는 $\therefore\ 5 \times 8 = 40$ (개)

10. 12로 나누어도 15로 나누어도 나머지가 2인 자연수 중에서 가장 작은 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 62

해설

12과 15의 최소공배수에 2를 더한다.

$$\begin{array}{r|rr} 3 & 12 & 15 \\ \hline & 4 & 5 \end{array}$$

$3 \times 4 \times 5 = 60$

$60 + 2 = 62$

11. 세 자연수 2, 3, 4 중 어느 것으로 나누어도 나머지가 1 인 세 자리의 자연수 중에서 가장 큰 수와 가장 작은 수의 차를 구하여라

▶ 답 :

▷ 정답 : 888

해설

구하는 수는 (2, 3, 4의 공배수) $+1$ 의 꼴이고
2, 3, 4 의 최소공배수를 구하면 12 이다.
세 자리 자연수 중 가장 작은 12 의 배수는 108 ,
세 자리 자연수 중 가장 큰 12 의 배수는 996 이다.
구하는 가장 작은 자연수는 $108+1=109$,
가장 큰 자연수는 $996+1=997$ 이다.
따라서 두 수의 차는 $997-109=888$ 이다.

12. 4로 나누면 2가 남고, 5로 나누면 3이 남고, 6으로 나누면 4가 남는 자연수 중 가장 작은 세 자리의 수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 118

해설

구하는 자연수를 x라 하면 $x+2$는 4, 5, 6의 공배수이다. 4, 5, 6의 최소공배수는 60이므로 $x+2$는 60, 120, 180, $\cdots$ 이다.
따라서 x는 58, 118, 178, $\cdots$ 이므로 가장 작은 세 자리의 자연수는 118이다.

13. 원주 위를 같은 방향으로 일정한 속도로 움직이는 세 점 A, B, C 가 있다. 점 A 는 한 바퀴 도는데 6 초가 걸리고, 점 B 는 1 분에 30 바퀴, 점 C 는 1 분에 12 바퀴를 돈다고 한다. 세 점 A, B, C 가 동시에 원주 위의 점 P 를 통과한 후, 15 분 동안 동시에 점 P 를 몇 번 통과 하는지 구하여라.

▶ 답 : 번

▷ 정답 : 30 번

해설

한 바퀴 도는데 A 는 6 초, B 는 $\frac{1}{30}$ 분(=2 초), C 는 $\frac{1}{12}$ 분(=5 초)가 걸린다.
그러므로 점 P 에서 동시에 출발한 후 처음으로 점 P 를 통과하는 데는 $6, 2, 5$ 의 최소공배수인 30 초가 걸린다.
따라서 점 P 를 15 분, 즉 900 초 동안 동시에 통과하는 횟수는 $900 \div 30 = 30$ (번) 이다.

14. A 와 B 가 함께 일자리를 구했다. A 는 4 일간 일하고 하루 쉬고, B 는 5 일간 일하고 이틀간 쉬기로 하였다. 이와 같이 180 일간 일한다면, 두 사람이 같이 쉬는 일수는?

① 5 일 ② 10 일 ③ 15 일 ④ 20 일 ⑤ 35 일

해설

5 와 7 의 최소공배수는 35 ,

35 일 동안 B 가 쉬는 날은 6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28, 34, 35 일,

이 중에 A 가 쉬는 날은 20, 35 일

따라서 180 일 동안 두 사람이 함께 쉬는 날은

$2 \times 5 = 10$(일) 이다.

15. 윤미는와 수정이는 아르바이트를 하는데 윤미는 6 일 일하고 쉬고, 수정이는 7 일 일하고 쉰다고 한다. 두 사람이 4 월 1 일에 동시에 일을 시작하였다면 처음으로 함께 쉬는 날은 언제인지 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5 월 12 일

해설

윤미는 6 일, 수정이는 7 일마다 쉬므로 6 과 7 의 최소공배수인 42 일마다 두 사람은 함께 쉰다. 그런데 4 월은 30 일까지 있으므로 구하는 날은 42 일 후인 5 월 12 일이다.

16. 두 자연수 A, B 의 최대공약수가 5이고, $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 일 때, 두 자연수 A, B 의 최소공배수는?

① 280 ② 350 ③ 420 ④ 490 ⑤ 560

해설

A 와 B 의 최대공약수가 5 이고 $\frac{A}{B} = \frac{7}{8}$ 이므로, $A = 35 = 5 \times 7$, $B = 40 = 2^3 \times 5$ 이다.
따라서 A 와 B 의 최소공배수는 $2^3 \times 5 \times 7 = 280$ 이다.

17. a, b 의 최대공약수는 7 , 두 수의 곱이 588 일 때, (a, b) 의 개수는?

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

a, b 의 최대공약수가 7 이므로
$a = 7x, b = 7y$ (x , y 는 서로소, $x < y$)라 하면
$7x \times 7y = 588$이다. 따라서 $x \times y = 12$
즉, (x , y)는 $(1, 12), (3, 4)$ 이므로 (a, b)는
$(7, 84), (21, 28)$ 이다. 따라서 2 개이다.

18. a, b 의 최대공약수는 4 , 두 수의 곱이 96 일 때, (a, b) 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

a, b 의 최대공약수가 4 이므로
$a = 4x$, $b = 4y$ (x , y 는 서로소, $x < y$)라 하면
$4x \times 4y = 96$ 이다. 따라서 $x \times y = 6$
즉, (x , y)는 $(1, 6), (2, 3)$ 이므로 (a, b)는
$(4, 24), (8, 12)$ 이다.
따라서 2 개이다.

19. 어떤 분수에 $\frac{20}{9}$, $\frac{25}{12}$ 의 어느 것을 곱하여도 그 결과는 자연수라고 한다. 이를 만족하는 분수 중 가장 작은 분수를 A 라 할 때, $A \times \frac{20}{9}$ 을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 16

해설

구하려는 분수를 $A = \frac{b}{a}$ 라고 하자.

$\frac{20}{9} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 } 9\text{의 배수} \\ a\text{는 } 20\text{의 약수} \end{cases}$

$\frac{25}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \rightarrow \begin{cases} b\text{는 } 12\text{의 배수} \\ a\text{는 } 25\text{의 약수} \end{cases}$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(9,\ 12\text{의 공배수})}{(20,\ 25\text{의 공약수})} \cdots$ ㉠ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수

$\frac{b}{a} = \frac{(9,\ 12\text{의 최소공배수})}{(20,\ 25\text{의 최대공약수})}$

$\therefore A = \frac{b}{a} = \frac{36}{5}$

따라서 $A \times \frac{20}{9} = \frac{36}{5} \times \frac{20}{9} = 4 \times 4 = 16$ 이다.

20. 어떤 자연수 A 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 또 어떤 분수 $\frac{A}{B}$ 를 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 에 각각 곱했더니 그 결과 역시 모두 자연수가 되었다. 가능한 수 중 가장 작은 A , 가장 큰 B 를 구하여 $A+B$ 를 계산하여라.

① 23 ② 25 ③ 27 ④ 33 ⑤ 35

해설

자연수 A 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분모인 6, 9 의 공배수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 작은 자연수는 6 과 9 의 최소공배수인 18 이다.

분수 $\frac{A}{B}$ 에서 B 는 두 분수 $\frac{25}{6}$, $\frac{70}{9}$ 의 분자인 25, 70 의 공약수이다. 따라서 이를 만족하는 가장 큰 자연수는 25 와 70 의 최대공약수인 5 이다.

$A=18,\ B=5$ 이므로

$A+B=23$ 이다.

21. 어떤 분수를 두 분수 $\frac{21}{8}$ 과 $\frac{35}{12}$ 에 각각 곱하였더니 그 결과가 모두 자연수가 되었다. 곱한 수 중에서 가장 작은 분수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{24}{7}$

해설

곱하는 분수를 $\frac{b}{a}$ 라고 하자

$\frac{21}{8} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \begin{cases} b\text{는 } 8\text{의 배수} \\ a\text{는 } 21\text{의 약수} \end{cases}$

$\frac{35}{12} \times \frac{b}{a} = (\text{자연수}) \begin{cases} b\text{는 } 12\text{의 배수} \\ a\text{는 } 35\text{의 약수} \end{cases}$

즉, $\frac{b}{a} = \frac{(8,\ 12\text{의 공배수})}{(21,\ 35\text{의 공약수})} \cdots$ ㉠ 이다.

㉠을 만족하는 가장 작은 분수는

$\frac{b}{a} = \frac{(8,\ 12\text{의 최소공배수})}{(21,\ 35\text{의 최대공약수})} \cdots$ ㉡ 이다.

$\therefore \ \frac{b}{a} = \frac{24}{7}$