1. 부등식 $ax^2 + 5x + b > 0$ 을 풀어서 $2 < x < 3$ 이라는 해가 구해졌다. 이 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $ab = 6$

해설

$ax^2 + 5x + b > 0$ ·····㉠
해가 $2 < x < 3$ 이 되는 이차부등식은
$(x-2)(x-3) < 0$ 전개하면
$x^2 - 5x + 6 < 0$ ·····㉡
㉠과 일차항의 계수를 맞추기위해
양변에 -1 을 곱하면
$-x^2 + 5x - 6 > 0$ ·····㉢
㉠, ㉢이 일치해야 하므로 $a = -1$, $b = -6$

2. 모든 실수 x에 대하여 x^2+px+p가 -3보다 항상 크기 위한 정수 p의 최댓값을 구하면?

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2+px+p>-3$

$x^2+px+(p+3)>0$

$D=p^2-4(p+3)=p^2-4p-12<0$

$(p-6)(p+2)<0$

$-2<p<6$

$\therefore$ 최대정수 : 5

3. x에 대한 부등식 $(a+b)x+a-2b>0$의 해가 $x<1$일 때, x에 대한 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$의 해는?

① $x<-10$　② $x<-5$　③ $x>-5$

④ $x<5$　⑤ $x>5$

해설

$(a+b)x+a-2b>0$에서 $(a+b)x>-a+2b\cdots$㉠

㉠의 해가 $x<1$이려면 $a+b<0\cdots$㉡

㉠이 양변을 $a+b$로 나누면 $x<\dfrac{-a+2b}{a+b}$이므로

$\dfrac{-a+2b}{a+b}=1,\ -a+2b=a+b$

$\therefore 2a=b\cdots$㉢

㉢을 ㉡에 대입하면 $a+2a=3a<0\ \therefore a<0$

㉢을 부등식 $(b-3a)x+a+2b>0$에 대입하면

$(2a-3a)x+a+4a>0,\ -ax>-5a\ \ \therefore x>5$

4. 방정식 $xy+4x-2y-11=0$을 만족하는 정수 x, y에 대하여 xy의 값이 아닌 것은?

① -15 ② -7 ③ -3 ④ 5 ⑤ 15

해설

$xy+4x-2y-11=0$에서 $(x-2)(y+4)=3$
x, y가 정수이므로
$(x-2,\ y+4)=(1,3),(-1,-3),(3,1),(-3,-1)$
$\therefore\ (x,\ y)=(3,-1),(1,-7),(5,-3),(-1,-5)$
$\therefore\ xy=-3,-7,-15,5$

5. 연립방정식 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases}$ 의 해를

$x = \alpha$,$y = \beta$라 할 때, $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta$의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$\begin{cases} y = x + 1 & \cdots ㉠ \\ x^2 + y^2 = 5 & \cdots ㉡ \end{cases}$

㉠을 ㉡에 대입하면

$x^2 + (x+1)^2 = 5$, $2x^2 + 2x - 4 = 0$,

$2(x+2)(x-1) = 0$

$\therefore\ x = 1,\ -2$

$x = 1$일 때, $y = 2$,

$x = -2$일 때, $y = -1$

$\therefore\ \alpha = 1, \beta = 2$ 또는 $\alpha = -2,\ \beta = -1$

$\therefore\ \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = 3$

6. 사차방정식 $x^4+x^3-x-1=0$의 두 허근을 α, β라 할 때, $\alpha^{100}+\frac{1}{\beta^{100}}$과 값이 같은 것은?

① $\alpha+1$ ② $\alpha-2$ ③ $\frac{2}{\beta}$ ④ -1 ⑤ 1

해설

$x^4+x^3-x-1=0$
$x^3(x+1)-(x+1)=0$
$(x+1)(x^3-1)=0$
$\rightarrow (x+1)(x-1)(x^2+x+1)=0$
$x^2+x+1=0$의 두 근이 α,β
$\therefore \alpha^3=1, \beta^3=1,\ \alpha+\beta=-1, \alpha\beta=1$

$$\alpha^{100}+\frac{1}{\beta^{100}}=(\alpha^3)^{33}\alpha+\frac{1}{(\beta^3)^{33}\beta}$$
$$=\alpha+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha\beta+1}{\beta}=\frac{2}{\beta}$$

7. $-1 \le x \le 1$ 에서 함수 $y = (x^2 + 2x)^2 - 4(x^2 + 2x) + 2$ 의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$x^2 + 2x = t$ 로 놓으면, $t = (x+1)^2 - 1$ 이므로
$-1 \le x \le 1$ 에서 $-1 \le t \le 3$
이 때, 주어진 함수는 $y = t^2 - 4t + 2 = (t-2)^2 - 2$
즉, $t = 2$ 일 때, y 의 최솟값은 -2 이고,
$t = -1$ 일 때, y 의 최댓값은 7 이다.
따라서 최댓값과 최솟값의 합은 5 이다.

8. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 이 중근을 가질 때, b 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $\frac{17}{32}$

해설

$x^2 - 4(a-1)x + a - 2b = 0$ 가 중근을 가지므로

$\frac{D}{4} = 4(a-1)^2 - (a-2b) = 4a^2 - 9a + 4 + 2b = 0$

$\therefore\ b = -2a^2 + \frac{9}{2}a - 2 = -2\left(a - \frac{9}{8}\right)^2 + \frac{17}{32}$

따라서 $a = \frac{9}{8}$ 일 때, b 는 최댓값 $\frac{17}{32}$ 을 갖는다.

9. 이차방정식 $2x^2 - 10x + 6 = 0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(\alpha - \beta)^2$을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 13

해설

$\alpha + \beta = -\dfrac{(-10)}{2} = 5$

$\alpha\beta = \dfrac{6}{2} = 3$

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 5^2 - 4 \cdot 3 = 13$

10. x의 이차식 $x^2+(3a+1)x+2a^2-b^2$이 완전제곱식이고, a, b가 정수일 때, 순서쌍 (a,b)의 갯수는?

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

완전제곱식이 되려면 판별식이 0이다.

$D=(3a+1)^2-4(2a^2-b^2)=0$

$a^2+6a+1+4b^2=0$

$\Rightarrow \quad (a+3)^2+(2b)^2=8$

a,b가 정수이므로

$a+3=\pm 2, \quad 2b=\pm 2$

$\therefore \quad a=-1, \ -5, \quad b=1,-1$

가능한 순서쌍 (a,b)의 갯수 : 4개

11. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$이다.

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a,b,c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

12. x에 대한 일차방정식 $(a^2+3)x+1=a(4x+1)$ 의 해가 무수히 많을 때, a의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$(a^2+3-4a)x=a-1$
모든 x에 대해 성립하려면
$a^2-4a+3=0,\ a-1=0$
공통근 : $a=1$

13. $z = \dfrac{2}{1+i}$ 에 대하여 $z^2 - 2z + 3$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ -1

해설

$z = \dfrac{2}{1+i} = 1 - i$

$z^2 - 2z + 3 = (1-i)^2 - 2(1-i) + 3 = 1$

14. 복소수 z에 대해 $z = i^m + i^n, m, n$은 양의 정수인 z의 개수를 구하면 몇 개나 될 것인지 구하면? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 6개 ② 7개 ③ 8개 ④ 9개 ⑤ 10개

해설

$m = 1, n = 1, z = i + i = 2i$

$m = 1, n = 2, z = i - 1$

$m = 1, n = 3, z = i - i = 0$

$m = 1, n = 4, z = i + 1$

$m = 1, n = 5, z = i + i = 2i$

	1	2	3	4
1	$2i$	$i-1$	0	$i+1$
2	$-1+i$	-2	$-1-i$	0
3	0	$-i-1$	$-2i$	$-i+1$
4	$1+i$	0	$1-i$	2

$z = 0, 2, -2, 2i, -2i, 1+i, -1+i, -1-i, 1-i$

$\therefore$ 9 개

15. $198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$를 간단히 하면?

① 6800 ② 7000 ③ 7200 ④ 7400 ⑤ 7600

해설

$198 = x, 200 = y, 202 = z$라 하면

$198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2} \times 600 \times 24$

$= 7200$

16. $n^4 - 6n^2 + 25$의 값이 소수가 되게 하는 정수 n의 개수는?

① 1개 ② 2개 ③ 4개
④ 없다 ⑤ 무수히 많다

해설

$$\begin{aligned} p &= n^4 - 6n^2 + 25 \\ &= n^4 + 10n^2 + 25 - 16n^2 \\ &= (n^2+5)^2 - (4n)^2 \\ &= (n^2+4n+5)(n^2-4n+5) \end{aligned}$$

p가 소수이므로 $n^2+4n+5=1$

또는 $n^2-4n+5=1$이어야 한다.

$n^2+4n+4=(n+2)^2=0$ 에서 $n=-2$

$n^2-4n+4=(n-2)^2=0$ 에서 $n=2$

따라서 구하는 n은 두 개이다.

17. $(a-b+c)(a+b-c)$를 전개한 식은?

① $a^2+b^2+c^2-2bc$ ② $a^2-b^2+c^2-2bc$

③ $a^2-b^2-c^2+2bc$ ④ $a^2+b^2-c^2-2bc$

⑤ $a^2+b^2+c^2+2bc$

해설

$$\begin{aligned}&(a-b+c)(a+b-c)\\&=\{a-(b-c)\}\{a+(b-c)\}\\&=a^2-(b-c)^2\\&=a^2-b^2-c^2+2bc\end{aligned}$$

18. 다항식 x^3+ax^2+bx-1이 x^2-3x+2로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ 로 놓으면
$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ 이므로 $f(x)$ 는 $x-1$, $x-2$ 로 나누어 떨어진다.
$f(1)=1+a+b-1=0$ 즉, $a+b=0\cdots$㉠
$f(2)=8+4a+2b-1=0$ 즉, $4a+2b=-7\cdots$㉡
㉠, ㉡으로부터 $a=-\frac{7}{2}$, $b=\frac{7}{2}$
$\therefore a+b=0$

19. 등식 $\dfrac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면
$2x^2+13x=A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서
$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 A, B, C를 구하면
$B=5,\ C=-2,\ A=4$
$\therefore\ A+B+C=7$

20. 두 다항식 $A = a + 2b$, $B = 2a + 3b$일 때, $2A + B$를 구하는 과정에서 사용된 연산법칙 중 옳지 <u>않은</u> 것을 골라라.

$$
\begin{aligned}
2A + B &= 2(a + 2b) + (2a + 3b) \\
&= (2a + 4b) + (2a + 3b) && \text{㉠ 분배법칙} \\
&= 2a + (4b + 2a) + 3b && \text{㉡ 결합법칙} \\
&= 2a + (2a + 4b) + 3b && \text{㉢ 교환법칙} \\
&= (2a + 2a) + (4b + 3b) && \text{㉣ 교환법칙} \\
&= (2 + 2)a + (4 + 3)b && \text{㉤ 분배법칙} \\
&= 4a + 7b
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉣

해설

㉣ $2a + (2a + 4b) + 3b = (2a + 2a) + (4b + 3b)$: 결합법칙