1. 다음 곱셈공식을 전개한 것 중 바른 것은?

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x-2y$

② $(a+b)^2(a-b)^2 = a^4-2a^2b^2+b^4$

③ $(-x+3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

④ $(a-b)(a^2+ab-b^2) = a^3-b^3$

⑤ $(p-1)(p^2+1)(p^4+1) = p^{16}-1$

해설

① $(x-y-1)^2 = x^2+y^2+1-2xy-2x+2y$
③ $(-x+3)^3 = -x^3+9x^2-27x+27$
④ $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
⑤ $(p-1)(p+1)(p^2+1)(p^4+1) = p^8-1$

2. 다항식 $f(x) = 3x^3 + ax^2 + bx + 12$가 $x - 2$로 나누어 떨어지고 또, $x - 3$으로도 나누어 떨어지도록 상수 $a + b$의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -5

해설

$f(x)$ 가 $x - 2$ 로 나누어 떨어지려면
$f(2) = 24 + 4a + 2b + 12 = 0$
$\therefore\ 4a + 2b + 36 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉠
또, $f(x)$ 가 $x - 3$ 으로 나누어 떨어지려면
$f(3) = 81 + 9a + 3b + 12 = 0$
$\therefore\ 9a + 3b + 93 = 0 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = -13,\ b = 8$

3. 실수 x 에 대하여 복소수 $(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$ 가 순허수가 되도록 하는 x 의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$(1+i)x^2-(1+3i)x-(2-2i)$
$=(x^2-x-2)+(x^2-3x+2)i$
순허수가 되려면 (실수 부분)=0, (허수 부분)$\neq 0$이어야 하므로
$x^2-x-2=0$, $x^2-3x+2\neq 0$
(i) $x^2-x-2=0$ 에서 $(x+1)(x-2)=0$
$\therefore\ x=-1$ 또는 $x=2$
(ii) $x^2-3x+2\neq 0$ 에서 $(x-1)(x-2)\neq 0$
$\therefore\ x\neq 1$ 또는 $x\neq 2$
따라서 (i), (ii) 에 의하여 $x=-1$

4. 등식 $\left(\dfrac{2+i}{1+\sqrt{2}i}\right)\left(\dfrac{1-4i}{1-\sqrt{2}i}\right)=a+bi$ 를 만족하는 실수 $a,\ b$ 에 대하여 $a-3b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a-3b=9$

해설

(좌변) $=\dfrac{(2+i)(1-4i)}{(1+\sqrt{2}i)(1-\sqrt{2}i)}$

$=\dfrac{2-8i+i-4i^2}{1-2i^2}$

$=\dfrac{6-7i}{3}=2-\dfrac{7}{3}i$ 이므로

$2-\dfrac{7}{3}i=a+bi$

복소수가 서로 같을 조건에 의하여

$a=2,\ b=-\dfrac{7}{3}$

$\therefore\ a-3b=2-3\times\left(-\dfrac{7}{3}\right)=2+7=9$

5. 이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+5(\alpha+\beta)$의 값을 구여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=-7,\ \alpha\beta=1$
$(\alpha^2+\beta^2)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=(-7)^2-2\cdot1=47$
$\therefore\ 47+5\cdot(-7)=47-35=12$

6. 다음 이차함수 중 최솟값을 갖는 것은?

① $y=-2x^2+1$ ② $y=-x^2+x+1$

③ $y=-(x-1)^2+4$ ④ $y=1-x^2$

⑤ $y=(x-1)(x+2)$

해설

그래프가 아래로 볼록해야 최솟값을 가진다.

7. 함수 $y = -x^2 - 2x + 5$ $(-2 \le x \le 2)$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 을 구하여라.

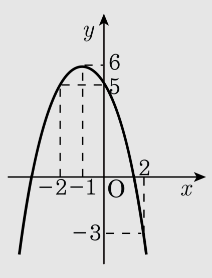
▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$y = -x^2 - 2x + 5 = -\left(x^2 + 2x + 1 - 1\right) + 5 = -(x+1)^2 + 6$

점$(-1, 6)$ 을 꼭지점으로 하고 위로 볼록한 포물선으로 다음 그림과 같다.



$f(-2) = 5, f(2) = -3$

따라서 최댓값은 $x = -1$ 일 때 $f(-1) = 6$ 이며

최솟값은 $x = 2$ 일 때 $f(2) = -3$ 이다.

$\therefore\ M + m = 6 - 3 = 3$

8. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.

$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$

$y = -(x-9)^2 + 81$

따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

9. $(-2x^3+x^2+ax+b)^2$ 의 전개식에서 x^3 의 계수가 -8 일 때, $a-2b$ 의 값은?

① -6 ② -4 ③ -2 ④ 0 ⑤ 2

해설

전개할 때 삼차항은 일차항과 이차항의 곱, 삼차항과 상수항의 곱이 각각 2 개씩 나온다.

$(-2x^3\times b)\times 2+(x^2\times ax)\times 2=(-4b+2a)x^3$

$2a-4b=-8$

$\therefore\ a-2b=-4$

10. $\frac{2x+3a}{4x+1}$ 가 x에 관계없이 일정한 값을 가질 때, $12a$의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: $12a=2$

해설

$\frac{2x+3a}{4x+1}=k$ (일정값 $=k$) 라 놓으면 $2x+3a=k(4x+1)$ 에서

$(2-4k)x+3a-k=0$

이 식은 x에 대한 항등식이므로,

$2-4k=0,\ 3a-k=0$

$k=\frac{1}{2}$ 이므로 $3a=k$에서 $a=\frac{1}{6}$

$\therefore\ 12a=2$

11. 다항식 $f(x)$를 $(3x+2)(x-4)$로 나눈 나머지가 $-2x+1$일 때, $f(x^2+3)$을 $x-1$로 나눈 나머지는?

① 7 ② 4 ③ 0 ④ -4 ⑤ -7

해설

$f(x) = (3x+2)(x-4)Q(x) - 2x + 1 \cdots$ ①
$f\left(x^3+3\right) = (x-1)Q'(x) + R \cdots$ ②
① 의 양변에 $x = 4$를 대입하면 $f(4) = -7$
② 의 양변에 $x = 1$을 대입하면 $f(4) = R$
$\therefore\ R = -7$

12. 임의의 실수 x에 대하여 $2x^3-5x+2=a(x+1)^3+b(x+1)^2+c(x+1)+d$ 가 성립할 때, $a^2-b^2+c^2-d^2$ 의 값을 구하면?

① 56 ② 28 ③ −28 ④ −46 ⑤ −56

해설

a,b,c,d 는 $2x^2-5x+2$ 를 $(x+1)$ 로 계속 나눠 줄때 나오는 나머지이다.
조립제법을 이용해 보면

$$
\begin{array}{r|rrrrll}
-1 & 2 & 0 & -5 & 2 & & \\
 & & -2 & 2 & 3 & & \\
\hline
-1 & 2 & -2 & -3 & \boxed{5} & \leftarrow & d \\
 & & -2 & 4 & & & \\
\hline
-1 & 2 & -4 & \boxed{1} & \leftarrow & c & \\
 & & -2 & & & & \\
\hline
-1 & 2 & \boxed{-6} & \leftarrow b & & & \\
 & \uparrow & & & & & \\
 & \text{a} & & & & &
\end{array}
$$

$\therefore a^2-b^2+c^2-d^2=2^2-(-6)^2+1^2-5^2=-56$

13. 이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하여라. (단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.)

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

계수가 모두 실수이므로
다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.
따라서 두 근의 근과 계수의 관계에서
$a=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3$
$-6=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b,$
$b=-3,\ a=12$
따라서 $a+b=9$

14. 이차방정식 $x^2 - 14kx + 96k = 0$ 의 두 근의 비가 $3 : 4$일 때, 양수 k의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $k = 2$

해설

두 근을 $3\alpha,\ 4\alpha$ 라고 하면
근과 계수의 관계에 의하여
$3\alpha + 4\alpha = 14k \cdots\cdots$ ㉠
$3\alpha \cdot 4\alpha = 96k \cdots\cdots$ ㉡
㉠에서 $7\alpha = 14k \ \ \therefore \alpha = 2k \cdots\cdots$ ㉢
㉡에서 $12\alpha^2 = 96k \ \ \therefore \alpha^2 = 8k \cdots\cdots$ ㉣
㉢을 ㉣에 대입하면 $4k^2 = 8k,\ 4k(k-2) = 0$
$\therefore k = 0$ 또는 $k = 2$
따라서 양수 k의 값은 $k = 2$이다.

15. 방정식 $x^2+x+1=0$의 한근이 ω일 때 $x=\dfrac{2}{\omega+1}$가 $x^2+px+q=0$의 근이다. 이 때, 유리수 p, q의 합을 바르게 구한 것은?

① -2　② 0　③ 2　④ 4　⑤ 8

해설

$x^2+x+1=0$ 의 두 근 : $\omega, \overline{\omega}$

$\omega+\overline{\omega}=-1,\ \omega\cdot\overline{\omega}=1$

$x^2+px+q=0$ 의 두 근 : $\dfrac{2}{\omega+1}, \dfrac{2}{\overline{\omega}+1}$

$$-p=\frac{2}{\omega+1}+\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{2(\omega+\overline{\omega})+4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=2$$

$$q=\frac{2}{\omega+1}\cdot\frac{2}{\overline{\omega}+1}=\frac{4}{\omega\overline{\omega}+(\omega+\overline{\omega})+1}=4$$

$p=-2, q=4 \quad \therefore \quad p+q=2$

해설

$x^2+x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\omega$라 하자.

$$\frac{2}{\omega+1}=\frac{2}{\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}+1}=1-\sqrt{3}i$$

$\therefore$ 다른 한근은 켤레복소수인 $1+\sqrt{3}i$가 된다.

$p=-$(두근의 합)$=-2,\ q=$(두근의 곱)$=4$

$p+q=2$

16. 최댓값이 6 이고, 대칭축이 $x = 3$ 인 이차함수의 식이 $y = -(x-p)^2 + q$ 일 때, $p + q$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 9

해설

최댓값이 6 이므로 $q = 6$
대칭축이 $x = 3$ 이므로 $p = 3$
$\therefore p + q = 3 + 6 = 9$

17. 둘레의 길이가 24 인 철사를 구부려서 부채꼴 모양을 만들려고 한다. 부채꼴의 넓이를 y 라고 할 때, 부채꼴의 넓이의 최댓값을 구하면?

① 18　② 20　③ 30　④ 32　⑤ 36

해설

반지름의 길이를 x 라 하면 호의 길이는 $24-2x$ 이다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}\times x\times(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36-36) \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

이차함수는 위로 볼록이므로 꼭짓점이 최댓값을 나타낸다.
따라서 꼭짓점이 $(6, 36)$ 이므로 반지름의 길이 $x=6$ 일 때, 부채꼴의 넓이 y 가 최댓값 36 을 가진다.

18. 실수 x가 $x^2-3x+1=0$을 만족할 때, $x^3+\dfrac{1}{x^3}$의 값을 구하면?

① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

해설

준식의 양변을 x로 나누면

$x+\dfrac{1}{x}=3$

$$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$$
$$=3^3-3\times3=18$$

19. 모든 실수 x에 대하여 $P(x^2+1)=\left\{P(x)\right\}^2+1$, $P(0)=0$을 만족한다. 2차 이하의 다항식 $P(x)$의 계수의 합은?

① 0　　② 1　　③ 2

④ 3　　⑤ 무수히 많다.

해설

$P(x)=ax^2+bx+c$라 하면
$P(0)=0$에서 $c=0$ $\therefore$ $P(x)=ax^2+bx$
$P(x^2+1)=\left\{P(x)\right\}^2+1$이므로
$a(x^2+1)^2+b(x^2+1)=(ax^2+bx)^2+1$
$ax^4+2ax^2+a+bx^2+b=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$
양변의 계수를 비교하면
$a=a^2,\ 2ab=0,\ 2a+b=b^2,\ a+b=1$
$a^2=a$와 $a+b=1$에서
$(a,\ b)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$이 되는데
이 중 $(1,\ 0)$은 $2a+b=b^2$을 만족하지 않으므로 $(a,\ b)=(0,\ 1)$
즉, $P(x)=x$뿐이다.
$\therefore$ 계수의 합은 1

해설

$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1$에서 $x=0$을 대입하면
$P(1)=\{P(0)\}^2+1$이 된다.
$P(1)=1$($\therefore$ 모든 계수의 합은 $x=1$ 대입)

20. $x-1$로 나누면 나머지가 3, $x-2$로 나누면 나머지가 7, $x-3$으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$라 할 때, $f(-3)$의 값은?

① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+ax^2+bx+c$

$f(1)=a+b+c=3$ ……①

$f(2)=4a+2b+c=7$ ……②

$f(3)=9a+3b+c=13$ ……③

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$a=1,\ b=1,\ c=1$

$f(x)$가 가장 낮은 차수가 되려면 $k=0$

$\therefore f(x)=x^2+x+1,$

$f(-3)=(-3)^2+(-3)+1=7$

21. $a^2 - b^2 = 1$ 일 때, $\{(a+b)^n + (a-b)^n\}^2 - \{(a+b)^n - (a-b)^n\}^2$ 의 값은? (단, n은 자연수)

① 2 ② $2(a+b)^n$ ③ 4

④ $4(a+b)^n$ ⑤ $4(a-b)^n$

해설

$(A)^2 - (B)^2$ 형태이므로
합차공식을 사용하여 정리하면
(준식)$= 4(a+b)^n(a-b)^n = 4(a^2-b^2)^n = 4$

22. $a+b+c=1$을 만족하는 세 실수 $a,\ b,\ c$에 대하여 $x=a-2b+3c$,$y=b-2c+3a$, $z=c-2a+3b$라 할 때, $(x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$의 값을 구하면?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$a+b+c=1$이므로

$x+y+z=2a+2b+2c=2(a+b+c)=2$

$\therefore\ (x^2+2xy+1)+(y^2+2yz+1)+(z^2+2zx+1)$

$=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx+3$

$=(x+y+z)^2+3$

$=2^2+3=4+3=7$

23. x에 관한 두 다항식 $f(x)$, $g(x)$에 대하여, $(x+1)f(x) = (x-1)g(x)$ 일 때, 다음 중 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는?

① $(x-1)g(x)$　② $(x+1)g(x)$　③ $(x-1)^2g(x)$
④ $(x+1)^2g(x)$　⑤ $(x-1)^3g(x)$

해설

$(x+1)f(x) = (x-1)g(x) \cdots$ ①
$x+1$과 $x-1$이 서로 소이므로
$x+1$은 $g(x)$의 인수이다.
따라서 $g(x) = (x+1)h(x) \cdots$ ② 로 놓으면
①에서 $f(x) = (x-1)h(x) \cdots$ ③
②와 ③에서 $f(x)$와 $g(x)$의 최소공배수는
$(x-1)(x+1)h(x)$ 즉, $(x-1)g(x)$

24. x 에 관한 두 다항식 $f(x) = x^3 + ax^2 + 2x - 1,\ g(x) = x^3 + bx^2 + 1$ 이 이차식의 최대공약수 $h(x)$를 가질 때, $h(-1)$의 값을 구하면? (단, $h(x)$의 이차항의 계수는 1이다.)

① 6 ② 3 ③ 0 ④ −3 ⑤ −6

해설

$f(x) + g(x) = x\left\{2x^2 + (a+b)x + 2\right\} = G(k+l)$
$f(x) - g(x) = (a-b)x^2 + 2x - 2 = G(k-l)$ (단, k, l : 서로소)
$\therefore\ -2x^2 - (a+b)x - 2 = (a-b)x^2 + 2x - 2$
$a - b = -2,\ a + b = -2$
$\therefore\ a = -2,\ b = 0$
$\therefore\ h(x) = x^2 - x + 1 \quad \therefore\ h(-1) = 3$

25. $x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 일 때 $x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x+\frac{1}{x}}}}$ 의 값은?

① 0 ② 1 ③ 2

④ $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\frac{-5+\sqrt{3}i}{4}$

해설

$x=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}i)$ 에서 $2x+1=\sqrt{3}i$

이 식의 양변을 제곱하여 정리하면

$x^2+x+1=0 \therefore\ x+\frac{1}{x}=-1$

$$\begin{aligned}\therefore\ (\text{준식}) &= x+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{x-1}}\\ &= x+\frac{x-1}{x^2-x+1}\\ &= x+\frac{x-1}{-2x}\\ &= \frac{-2x^2+x-1}{-2x}\\ &= \frac{-2(-x-1)+x-1}{-2x}\\ &= \frac{3x+1}{-2x}\\ &= -\frac{3}{2}-\frac{1}{2x}\\ &= -\frac{3}{2}+\frac{1}{1-\sqrt{3}i}\\ &= \frac{-5+\sqrt{3}i}{4}\end{aligned}$$