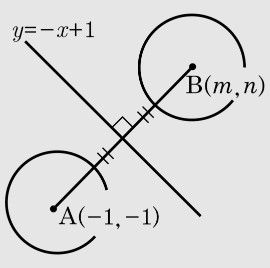
1. 원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 일 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -3 ② -1 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

해설



원 $(x+1)^2+(y+1)^2=1$ 을 직선 $y=-x+1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이 때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1,-1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m,n)$ 이라고 하면

선분 AB 는 직선 $y=-x+1$ 과 수직이므로

$\dfrac{n+1}{m+1}\cdot(-1)=-1$ 에서

$m=n\cdots\cdots$ ㉠

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\dfrac{m-1}{2},\dfrac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y=-x+1$ 위에 있으므로

$\dfrac{n-1}{2}=-\dfrac{m-1}{2}+1$ 에서

$m+n=4\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$m=2, n=2$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2,2)$ 이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$(x-2)^2+(y-2)^2=1$

즉, $x^2+y^2-4x-4y+7=0$

$\therefore a=-4, b=-4, c=7$

$\therefore a+b+c=-1$

2. 점 A(3, 4) 를 직선 $x-y+2=0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 라 할 때, A′ 의 좌표는?

① (−3, 5)　② (−3, 8)　③ (3, 2)
④ (2, 5)　⑤ (5, 2)

해설

A′ 를 $(a,\ b)$ 라 하자
i) A′ 과 (3, 4) 의 중점은 $x-y+2=0$ 을 지난다.
$\therefore\ \dfrac{a+3}{2}-\dfrac{b+4}{2}+2=0$
ii) A′ 과 (3, 4) 를 잇는 직선과 직선 $x-y+2=0$ 은 수직으로 만난다.
$\therefore\ \dfrac{4-b}{3-a}=-1$
i) 과 ii) 를 연립하여 a, b 를 구하면,
$a=2,\ b=5$

3. 점 (2, 1) 을 직선 $y = 2x+1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$ ② $\left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)$ ③ $\left(-\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$
④ $\left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$ ⑤ $\left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$

해설

대칭이동한 점의 좌표를 (α, β) 라 하자.
i) $(2, 1)$, (α, β) 를 잇는 선분의 기울기는 $y = 2x+1$ 와 수직이다.

$\Rightarrow \quad \frac{\beta-1}{\alpha-2} \times 2 = -1 \quad \therefore \quad 2\beta+\alpha = 4$

ii) $(2, 1)$, (α, β) 의 중점은 $y = 2x+1$ 위에 있다.

$\Rightarrow \quad \frac{\beta+1}{2} = 2(\frac{\alpha+2}{2})+1$

$\therefore \quad 2\alpha-\beta+5 = 0$

i), ii) 를 연립하면, $\alpha = -\frac{6}{5}$ $\beta = \frac{13}{5}$

$\therefore$ 대칭이동한 점은 $\left(-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$

4. 점 $A(2,\ 3)$ 을 직선 $y = x - 1$ 에 의해 대칭 이동한 점의 좌표는?

① $(3,\ -2)$　　② $(3,\ 2)$　　③ $(1,\ 4)$
④ $(4,\ 2)$　　⑤ $(4,\ 1)$

해설

대칭이동 된 점의 좌표를 $A' = (X,\ Y)$ 라 하면,
$\overline{AA'}$ 은 $y = x - 1$ 에 수직하고 AA' 의 중점은 $y = x - 1$ 위에 있다.
$\Rightarrow\ \dfrac{Y-3}{X-2} = -1,\ \dfrac{Y+3}{2} = \dfrac{X+2}{2} - 1$
두 식을 연립하면, $X = 4,\ Y = 1$
$\therefore\ A' = (4,\ 1)$

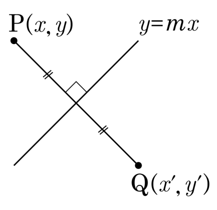
5. 직선 $3x-2y+6=0$ 에 관하여 점 $P(5,\ 4)$ 와 대칭인 점 Q 의 좌표를 구하면?

① $Q(-1,\ 2)$ ② $Q(-1,\ 3)$ ③ $Q(-1,\ 4)$
④ $Q(-1,\ 6)$ ⑤ $Q(-1,\ 8)$

해설

$Q(a,\ b)$ 라 하면 $\overline{PQ}$ 의 중점
$\left(\frac{a+5}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$ 은 직선 $3x-2y+6=0$ 위에 있으므로
$3\times\frac{a+5}{2}-2\times\frac{b+4}{2}+6=0$
$\to 3a+15-2b-8+12=0$
$\to 3a-2b=-19\cdots$①
또, 주어진 직선과 $\overline{PQ}$ 는 서로 직교하므로
기울기의 곱= -1 이 된다.
$\therefore\ \frac{b-4}{a-5}\times\frac{3}{2}=-1\to 3b-12=-2a+10$
$\to 2a+3b=22\cdots$②
① 과 ② 를 연립하여 풀면 $a=-1,\ b=8$
$\therefore\ Q(-1,\ 8)$

6. 다음은 직선 $y=mx$에 대한 점 $\mathrm{P}(x,\ y)$의 대칭점을 구하는 과정이다. 빈칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



> 대칭점을 $\mathrm{Q}(x', y')$ 라 하면,
> PQ 의 중점이 직선
> $y=mx$ 위에 있으므로,
> (가)$=m$ (나),
> 또한 직선
> PQ 와 직선 $y=mx$ 가 직교하므로
> $\dfrac{y'-y}{x'-x}=$ (다)
> (가), (나), (다) 에 의하여
> $x'=\dfrac{1}{1+m^2}\left\{(1-m^2)x+2my\right\}$
> $y'=\dfrac{1}{1+m^2}\left\{2mx-(1-m^2)y\right\}$

① (가):$y+y'$, (나):$x+x'$, (다):$-\dfrac{1}{m}$
② (가):$\dfrac{y+y'}{2}$, (나):$\dfrac{x+x'}{2}$, (다):$-\dfrac{1}{m}$
③ (가):$\dfrac{y+y'}{2}$, (나):$\dfrac{x+x'}{2}$, (다):$\dfrac{1}{m}$
④ (가):$\dfrac{y+y'}{3}$, (나):$\dfrac{x+x'}{3}$, (다):$\dfrac{1}{m}$
⑤ (가):$\dfrac{y+y'}{3}$, (나):$\dfrac{x+x'}{3}$, (다):$\dfrac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $\mathrm{P}=(x,\ y)$, $\mathrm{Q}=(x',\ y')$ 이므로
중점은 $\left(\dfrac{x+x'}{2}, \dfrac{y+y'}{2}\right)$ 이다.
(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이 다.
$\Rightarrow\ m\times$(다)$=-1$
$\therefore$ (다) : $-\dfrac{1}{m}$

7. 점$(3,\ 4)$를 직선 $x-y+2=0$에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① $(1,\ 5)$　　② $(2,\ 5)$　　③ $(3,\ 5)$

④ $(4,\ 5)$　　⑤ $(6,\ 5)$

해설

구하려는 점을 $(a,\ b)$라 하면, $(3,\ 4)$와 $(a,\ b)$의 중점은 $x-y+2=0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x-y+2=0$은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2},\ \frac{b+4}{2}\right)$를 $x-y+2=0$ 에 대입하면

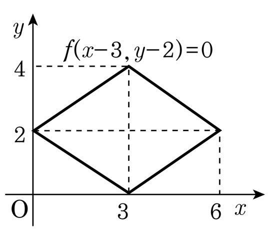
$a-b=-3\cdots$①

수직조건은 기울기의 곱이 -1이므로 $x-y+2=0$의 기울기가 1일때 두점을 지나는 기울기는 -1이다.

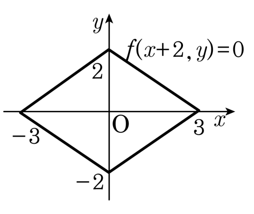
$\frac{b-4}{a-3}=-1$, $a+b=7\cdots$②

따라서 ①, ②를 연립하면 $a=2, b=5$

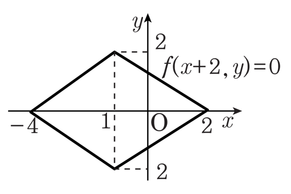
8. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



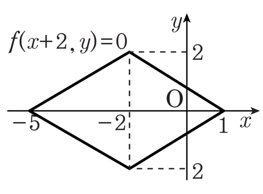
①



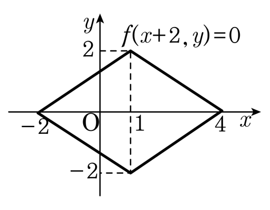
②



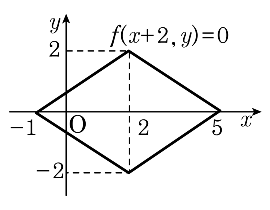
③



④

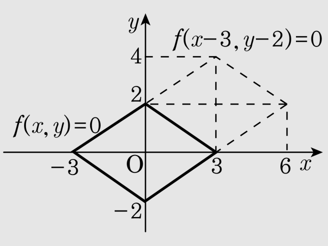


⑤

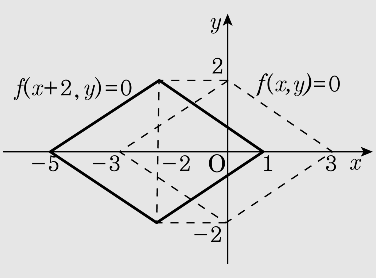


해설

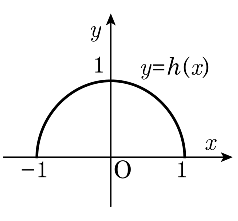
주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면
다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



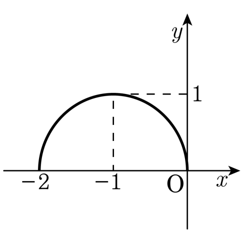
$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을
x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



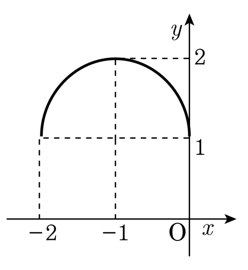
9. 함수 $y=f(x)$ 에 대하여 $g(x)=f(x-2)+1$, $h(x)=g(x+1)-2$ 라고 할 때, $y=h(x)$ 의 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음 중 $y=f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



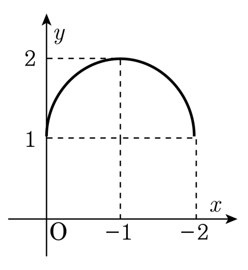
①



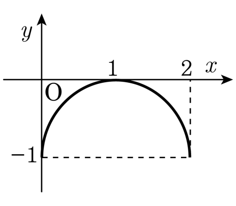
②



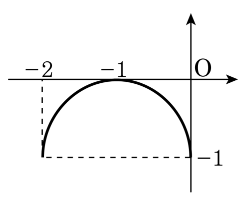
③



④

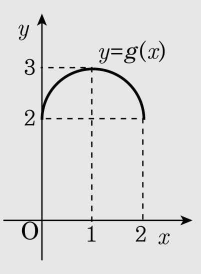


⑤

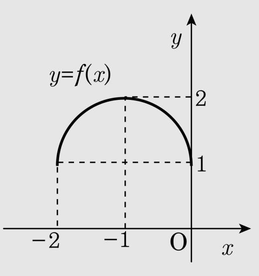


해설

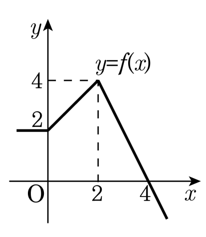
$y=h(x)$ 의 그래프는 $y=g(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 -1 만큼,
y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
$y=g(x)$ 의 그래프는 $y=h(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
평행이동한 것이다.
따라서, $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

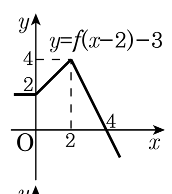


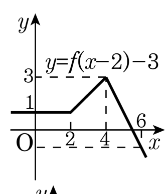
또, $y=g(x)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를
x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
평행이동한 것이므로 $y=f(x)$ 의 그래프는
$y=g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, $y=f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.

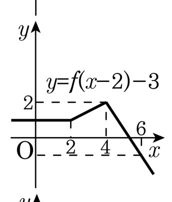


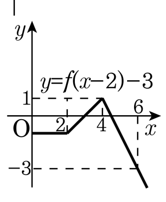
10. 방정식 $y=f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y=f(x-2)-3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?

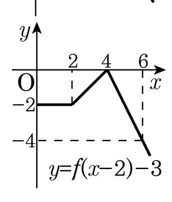


①


②


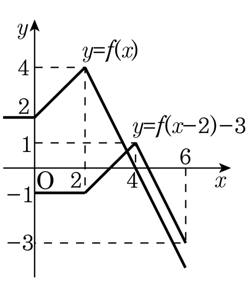
③


④


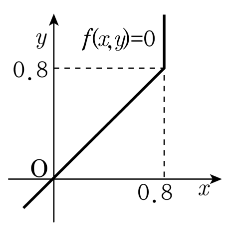
⑤


해설

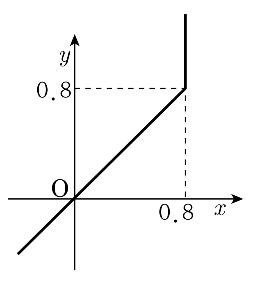
$y=f(x-2)-3 \Leftrightarrow y+3=f(x-2)$
이므로 구하는 그래프는
$y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼,
y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



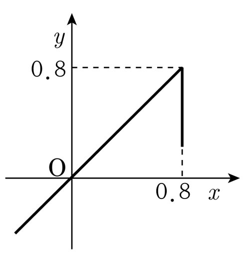
11. 방정식 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y,-x)=0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



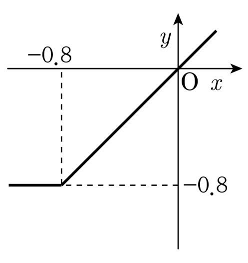
①



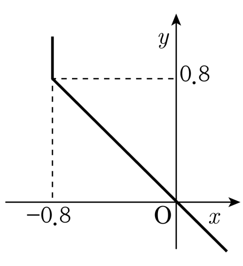
②



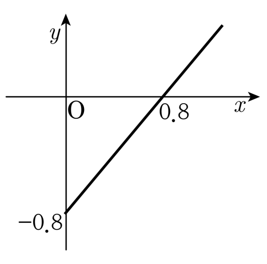
③



④



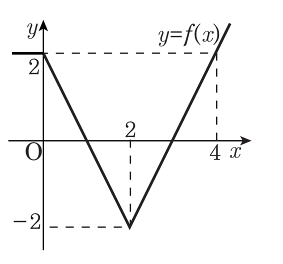
⑤



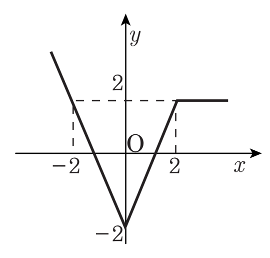
해설

$f(-y,-x)=0$ 은 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형을
직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.
이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.
따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③과 같다.

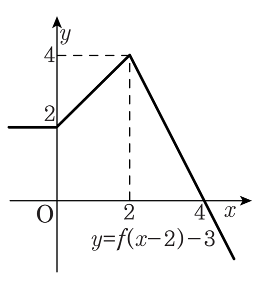
12. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2 - x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



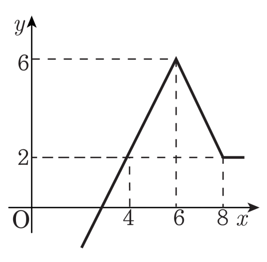
①



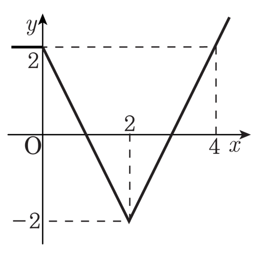
②



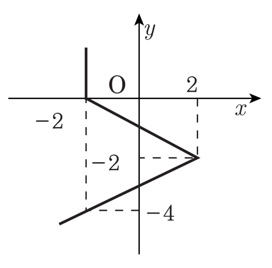
③



④



⑤



해설

$y = f(2 - x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$
따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에
대하여 대칭이동한 것이다.
그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면
①과 같다.

13. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

갑 : 점 $(x,\ y)$ 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.
을 : 점 (x,y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2,-1)$ 은 점 $(0,0)$ 으로 이동한다.
병 : 점 (x,y) 를 점 $(-x,-y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y=f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y=-f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.
정 : 점 (x,y) 를 점 (y,x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x,y)=0$ 이 나타내는 도형은 $f(y,x)=0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병　② 갑, 을, 정　③ 갑, 병, 정
④ 을, 병, 정　⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참
병 : $(x,y) \rightarrow (-x,-y)$: 원점 대칭
$\therefore\ y=f(x) \rightarrow -y=f(-x)$: 거짓

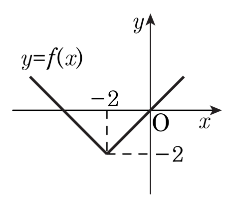
14. 다음 중 원 $x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

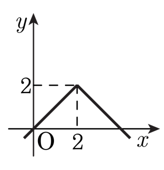
① $x^2+y^2=\frac{1}{3}$ ② $x^2+y^2=1$
③ $x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ ④ $x^2+y^2=4$
⑤ $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

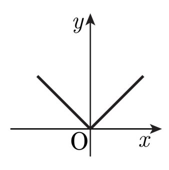
해설

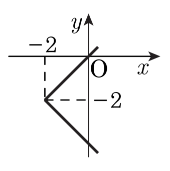
평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.
$x^2+y^2+4x-4y+4=0$ 에서 $(x+2)^2+(y-2)^2=4$
따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

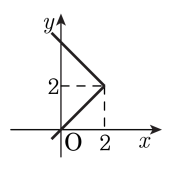
15. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?

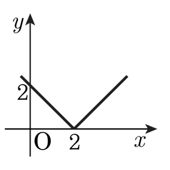


①


②


③


④


⑤


해설

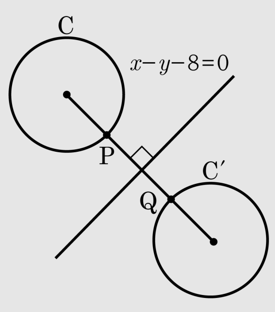
$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

16. 원 C : $x^2+y^2+6x-16=0$ 을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C′ 이라 하고 두 원 C, C′ 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

① 1 ② 3 ③ $7\sqrt{5}-12$

④ 5 ⑤ $11\sqrt{2}-10$

해설



선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면
다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결한 선분이
두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡으면 된다.
이 때, 원 C : $x^2+y^2+6x-16=0$ 을
표준형으로 나타내면
$(x+3)^2+y^2=25$ 이므로
이 원의 중심은 $(-3,0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.
이 원을 직선 $x-y-8=0$ 에 대하여 대칭이동한
원 C′ 의 중심을 (a,b) 라 하면
두 점 $(-3,0)$ 과 (a,b) 를 이은
선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가
직선 $x-y-8=0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2}-\frac{b}{2}-8=0$$

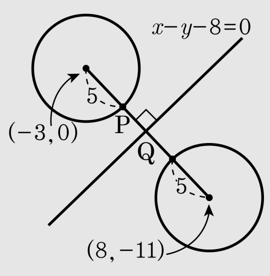
$\therefore a-b=19 \cdots\cdots$ ㉠
또, 직선 $x-y-8=0$, 즉 $y=x-8$ 의 기울기는 1 이고,
두 원의 중심 $(-3,0)$, (a,b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$$\frac{b}{a+3}=-1$$

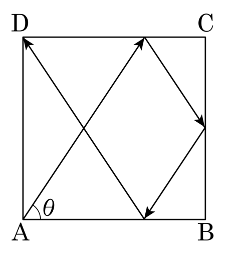
$\therefore a+b=-3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a=8, b=-11$
따라서, 두 원의 중심 $(-3,0)$, $(8,-11)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{\{8-(-3)\}^2+(-11-0)^2}=11\sqrt{2}$$

이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의
길이의 최솟값은
$11\sqrt{2}-5\times 2=11\sqrt{2}-10$



17. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 꼭짓점 D 로 들어올 때, $\tan\theta$ 의 값은? (단, 입사각과 반사각은 같다.)



① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\frac{3}{2}$

④ $2\sqrt{2}$　　⑤ 2

해설

다음 그림에서 정사각형 ABCD 의 꼭짓점 A 에서 발사된 빛이 그림과 같이 꼭짓점 D 에 들어올 때 $\tan\theta$ 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.