

1. 원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형의 방정식이 $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ 일 때, $a + b + c$ 의 값은?

① -3

② -1

③ 0

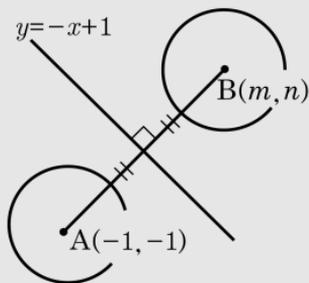
④ 3

⑤ 5

해설

원 $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$ 을 직선 $y = -x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 도형은 반지름의 길이가 1 인 원이다.

이때, 옮기기 전의 원의 중심을 $A(-1, -1)$, 옮긴 후의 원의 중심을 $B(m, n)$ 이라고 하면



선분 AB 는 직선 $y = -x + 1$ 과 수직이므로

$$\frac{n+1}{m+1} \cdot (-1) = -1 \text{ 에서}$$

$$m = n \dots\dots \textcircled{㉠}$$

또한, 선분 AB 의 중점 $\left(\frac{m-1}{2}, \frac{n-1}{2}\right)$ 은

직선 $y = -x + 1$ 위에 있으므로

$$\frac{n-1}{2} = -\frac{m-1}{2} + 1 \text{ 에서}$$

$$m + n = 4 \dots\dots \textcircled{㉡}$$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$$m = 2, n = 2$$

따라서, 대칭이동하여 옮겨진 원은 중심이 $(2, 2)$

이고 반지름의 길이가 1 이므로 그 방정식은

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 1$$

$$\text{즉, } x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 = 0$$

$$\therefore a = -4, b = -4, c = 7$$

$$\therefore a + b + c = -1$$

2. 점 A(3, 4) 를 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A' 라 할 때, A' 의 좌표는?

① (-3, 5)

② (-3, 8)

③ (3, 2)

④ (2, 5)

⑤ (5, 2)

해설

A' 를 (a, b) 라 하자

i) A' 과 (3, 4) 의 중점은 $x - y + 2 = 0$ 을 지난다.

$$\therefore \frac{a+3}{2} - \frac{b+4}{2} + 2 = 0$$

ii) A' 과 (3, 4) 를 잇는 직선과 직선 $x - y + 2 = 0$ 은 수직으로 만난다.

$$\therefore \frac{4-b}{3-a} = -1$$

i) 과 ii) 를 연립하여 a, b 를 구하면,

$$a = 2, b = 5$$

3. 점 (2, 1) 을 직선 $y = 2x + 1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 구하면?

① $\left(-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$

② $\left(-\frac{7}{5}, \frac{11}{5}\right)$

③ $\left(-\frac{7}{6}, \frac{13}{6}\right)$

④ $\left(-\frac{5}{6}, \frac{11}{6}\right)$

⑤ $\left(\frac{5}{6}, -\frac{11}{6}\right)$

해설

대칭이동한 점의 좌표를 (α, β) 라 하자.

i) (2, 1), (α, β) 를 잇는 선분의 기울기는 $y = 2x + 1$ 와 수직이다.

$$\Rightarrow \frac{\beta - 1}{\alpha - 2} \times 2 = -1 \quad \therefore 2\beta + \alpha = 4$$

ii) (2, 1), (α, β) 의 중점은 $y = 2x + 1$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{\beta + 1}{2} = 2\left(\frac{\alpha + 2}{2}\right) + 1$$

$$\therefore 2\alpha - \beta + 5 = 0$$

i), ii) 를 연립하면, $\alpha = -\frac{6}{5}$ $\beta = \frac{13}{5}$

\therefore 대칭이동한 점은 $\left(-\frac{6}{5}, \frac{13}{5}\right)$

4. 점 A(2, 3) 을 직선 $y = x - 1$ 에 의해 대칭 이동한 점의 좌표는?

① (3, -2)

② (3, 2)

③ (1, 4)

④ (4, 2)

⑤ (4, 1)

해설

대칭이동 된 점의 좌표를 $A' = (X, Y)$ 라 하면,
 $\overline{AA'}$ 은 $y = x - 1$ 에 수직하고 AA' 의 중점은 $y = x - 1$ 위에 있다.

$$\Rightarrow \frac{Y-3}{X-2} = -1, \frac{Y+3}{2} = \frac{X+2}{2} - 1$$

두 식을 연립하면, $X = 4, Y = 1$

$$\therefore A' = (4, 1)$$

5. 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 에 관하여 점 $P(5, 4)$ 와 대칭인 점 Q 의 좌표를 구하면?

- ① $Q(-1, 2)$ ② $Q(-1, 3)$ ③ $Q(-1, 4)$
④ $Q(-1, 6)$ ⑤ $Q(-1, 8)$

해설

$Q(a, b)$ 라 하면 \overline{PQ} 의 중점

$\left(\frac{a+5}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ 은 직선 $3x - 2y + 6 = 0$ 위에 있으므로

$$3 \times \frac{a+5}{2} - 2 \times \frac{b+4}{2} + 6 = 0$$

$$\rightarrow 3a + 15 - 2b - 8 + 12 = 0$$

$$\rightarrow 3a - 2b = -19 \cdots \text{①}$$

또, 주어진 직선과 \overline{PQ} 는 서로 직교하므로 기울기의 곱 = -1 이 된다.

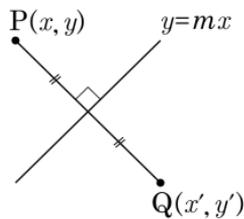
$$\therefore \frac{b-4}{a-5} \times \frac{3}{2} = -1 \rightarrow 3b - 12 = -2a + 10$$

$$\rightarrow 2a + 3b = 22 \cdots \text{②}$$

① 과 ② 를 연립하여 풀면 $a = -1, b = 8$

$\therefore Q(-1, 8)$

6. 다음은 직선 $y = mx$ 에 대한 점 $P(x, y)$ 의 대칭점을 구하는 과정이다. 빈 칸에 들어갈 수식을 순서대로 고르면?



대칭점을 $Q(x', y')$ 라 하면,

PQ 의 중점이 직선

$y = mx$ 위에 있으므로,

(가) = m (나),

또한 직선

PQ 와 직선 $y = mx$ 가 직교하므로

$$\frac{y' - y}{x' - x} = \text{(다)}$$

(가), (나), (다) 에 의하여

$$x' = \frac{1}{1 + m^2} \{ (1 - m^2)x + 2my \}$$

$$y' = \frac{1}{1 + m^2} \{ 2mx - (1 - m^2)y \}$$

- ① (가): $y + y'$, (나): $x + x'$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ② (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $-\frac{1}{m}$
 ③ (가): $\frac{y + y'}{2}$, (나): $\frac{x + x'}{2}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ④ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m}$
 ⑤ (가): $\frac{y + y'}{3}$, (나): $\frac{x + x'}{3}$, (다): $\frac{1}{m^2}$

해설

(가), (나) : $P = (x, y)$, $Q = (x', y')$ 이므로

중점은 $\left(\frac{x + x'}{2}, \frac{y + y'}{2} \right)$ 이다.

(다): 두 직선이 직교하면 기울기의 곱이 -1 이다.

$$\Rightarrow m \times \text{(다)} = -1$$

$$\therefore \text{(다)} : -\frac{1}{m}$$

7. 점(3, 4)를 직선 $x - y + 2 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 점을 구하면?

① (1, 5)

② (2, 5)

③ (3, 5)

④ (4, 5)

⑤ (6, 5)

해설

구하려는 점을 (a, b) 라 하면, $(3, 4)$ 와 (a, b) 의 중점은 $x - y + 2 = 0$ 위를 지나고, 두 점을 이은 직선과 $x - y + 2 = 0$ 은 수직이다.

따라서 중점인 $\left(\frac{a+3}{2}, \frac{b+4}{2}\right)$ 를 $x - y + 2 = 0$ 에 대입하면

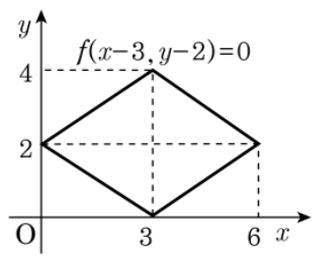
$$a - b = -3 \cdots \textcircled{1}$$

수직조건은 기울기의 곱이 -1 이므로 $x - y + 2 = 0$ 의 기울기가 1 일때 두점을 지나는 기울기는 -1 이다.

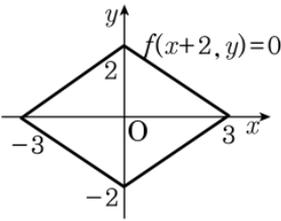
$$\frac{b-4}{a-3} = -1, a+b = 7 \cdots \textcircled{2}$$

따라서 ①, ②를 연립하면 $a = 2, b = 5$

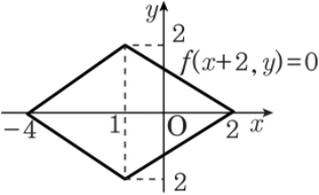
8. 방정식 $f(x-3, y-2) = 0$ 이 나타내는 도형이 다음 그림과 같을 때 방정식 $f(x+2, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표 평면 위에 바르게 나타낸 것은?



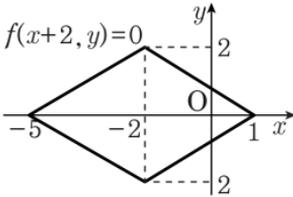
①



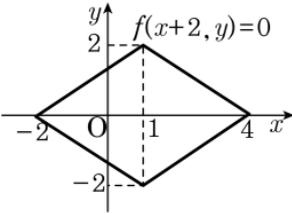
②



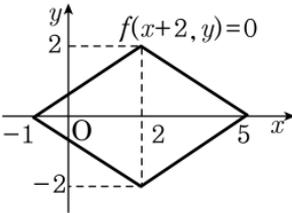
③



④

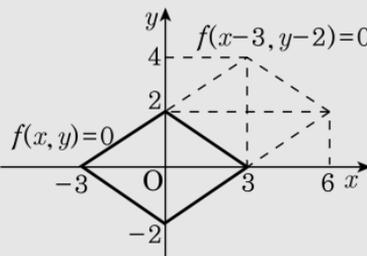


⑤

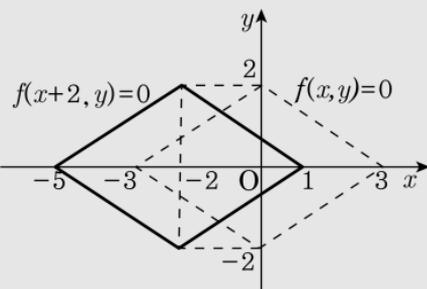


해설

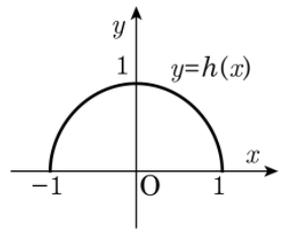
주어진 $f(x-3, y-2) = 0$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -3 만큼, y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동하면 다음 그림과 같이 $f(x, y) = 0$ 의 그래프를 얻을 수 있다.



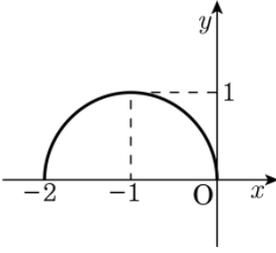
$f(x+2, y) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 을 x 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이다.



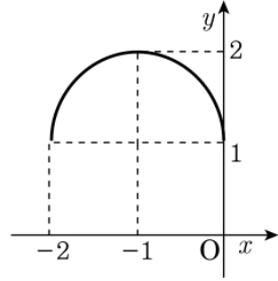
9. 함수 $y = f(x)$ 에 대하여 $g(x) = f(x - 2) + 1$,
 $h(x) = g(x + 1) - 2$ 라고 할 때, $y = h(x)$ 의
 그래프는 그림과 같이 중심이 원점이고 반지
 름의 길이가 1 인 원의 일부이다. 이 때, 다음
 중 $y = f(x)$ 의 그래프로 옳은 것은?



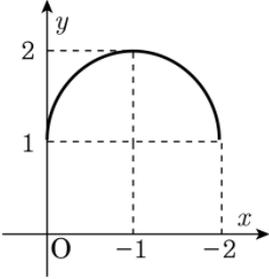
①



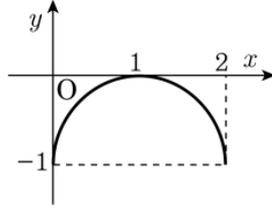
②



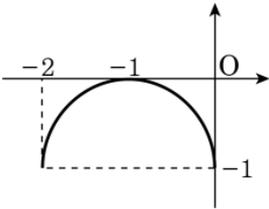
③



④

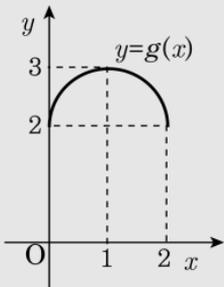


⑤

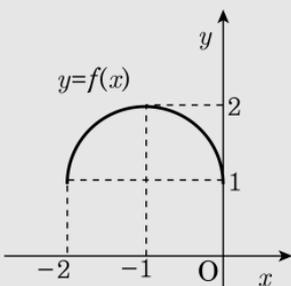


해설

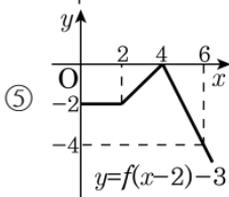
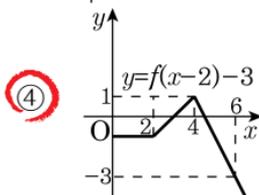
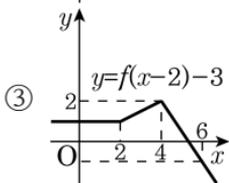
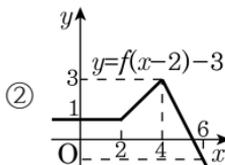
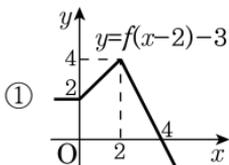
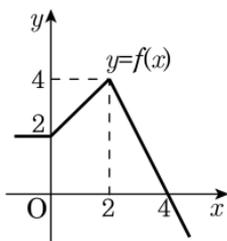
$y = h(x)$ 의 그래프는 $y = g(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 -1 만큼,
 y 축의 방향으로 -2 만큼 평행이동한 것이므로
 $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = h(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 1 만큼, y 축의 방향으로 2 만큼
 평행이동한 것이다.
 따라서, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



또, $y = g(x)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를
 x 축의 방향으로 2 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼
 평행이동한 것이므로 $y = f(x)$ 의 그래프는
 $y = g(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 -2 만큼,
 y 축의 방향으로 -1 만큼 평행이동한 것이다.
 따라서, $y = f(x)$ 의 그래프는 다음 그림과 같다.



10. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, 방정식 $y = f(x-2) - 3$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



해설

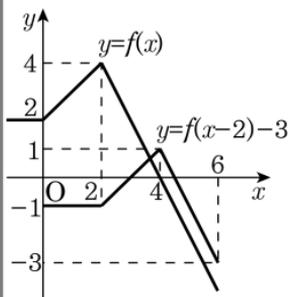
$$y = f(x-2) - 3 \Leftrightarrow y + 3 = f(x-2)$$

이므로 구하는 그래프는

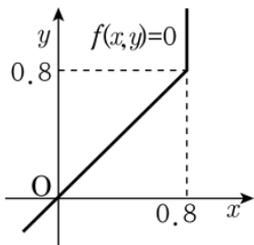
$y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 2 만큼,

y 축의 방향으로 -3 만큼 평행이동한 것이다.

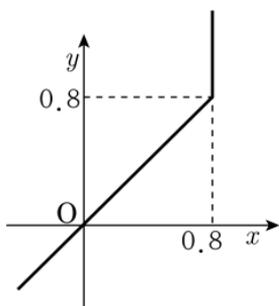
따라서, 구하는 그래프는 다음 그림과 같다.



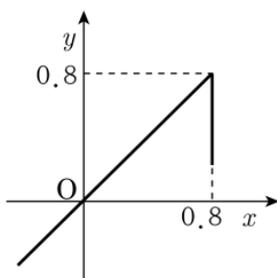
11. 방정식 $f(x,y) = 0$ 이 나타내는 도형이 오른쪽 그림과 같을 때, $f(-y, -x) = 0$ 이 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



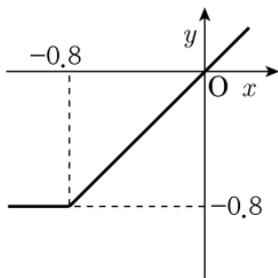
①



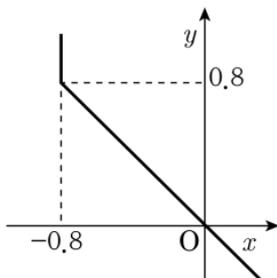
②



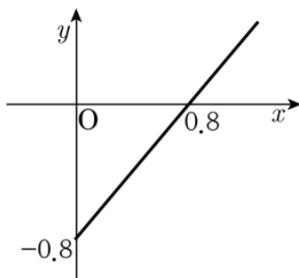
③



④



⑤



해설

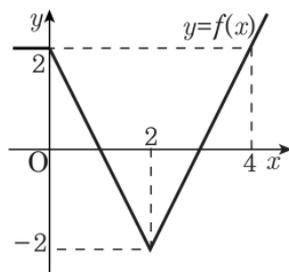
$f(-y, -x) = 0$ 은 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

이때, 꺾인 점 $(0.8, 0.8)$ 은

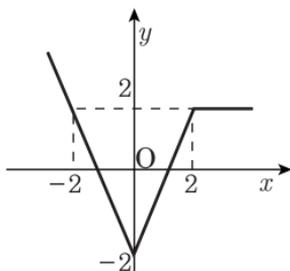
점 $(-0.8, -0.8)$ 로 옮겨진다.

따라서, 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면 ③ 과 같다.

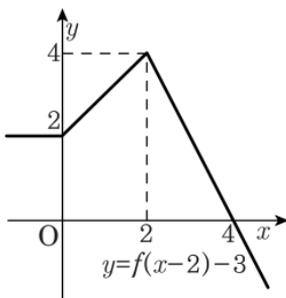
12. 방정식 $y = f(x)$ 가 나타내는 도형이 그림과 같을 때, $y = f(2-x)$ 가 나타내는 도형을 좌표평면 위에 바르게 나타낸 것은?



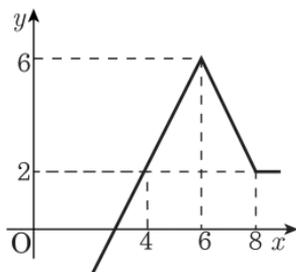
①



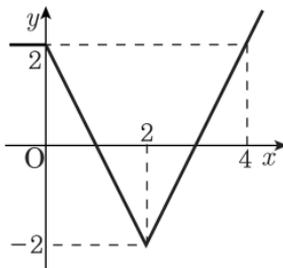
②



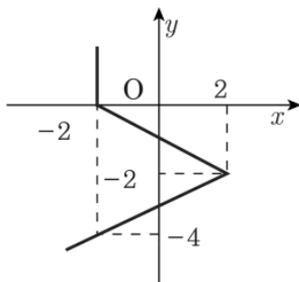
③



④



⑤



해설

$$y = f(2-x) \Leftrightarrow y = f(2 \cdot 1 - x)$$

따라서 $y = f(x)$ 의 그래프를 직선 $x = 1$ 에 대하여 대칭이동한 것이다.

그러므로 구하는 도형을 좌표평면 위에 나타내면

① 과 같다.

13. 다음은 갑, 을, 병, 정 네 사람이 도형의 이동에 대하여 말한 것이다. 올바르게 말한 사람은?

갑: 점 (x, y) 를 점 $(x-a, y-b)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(x+a, y+b) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동 한다.

을: 점 (x, y) 를 점 $(x-2, y+1)$ 로 옮기는 평행이동에 의하여 점 $(2, -1)$ 은 점 $(0, 0)$ 으로 이동한다.

병: 점 (x, y) 를 점 $(-x, -y)$ 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $y = f(x)$ 이 나타내는 도형은 $y = -f(-x)$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

정: 점 (x, y) 를 점 (y, x) 로 옮기는 대칭이동에 의하여 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형은 $f(y, x) = 0$ 이 나타내는 도형으로 이동한다.

① 갑, 을, 병

② 갑, 을, 정

③ 갑, 병, 정

④ 을, 병, 정

⑤ 갑, 을, 병, 정

해설

갑, 을, 정 : 참

병 : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$: 원점 대칭

$\therefore y = f(x) \rightarrow -y = f(-x)$: 거짓

14. 다음 중 원 $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 을 평행이동하여 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은?

① $x^2 + y^2 = \frac{1}{3}$

② $x^2 + y^2 = 1$

③ $x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$

④ $x^2 + y^2 = 4$

⑤ $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = \frac{1}{2}$

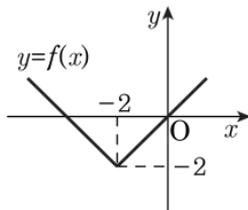
해설

평행이동하여 겹쳐질 수 있으려면
반지름의 길이가 같아야 한다.

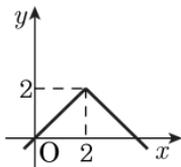
$x^2 + y^2 + 4x - 4y + 4 = 0$ 에서 $(x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 4$

따라서 겹쳐질 수 있는 원의 방정식은
반지름의 길이가 2인 ④이다.

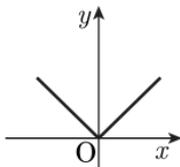
15. 다음 그림은 함수의 그래프이다. 다음 중 $y = f(-x) + 2$ 의 그래프를 나타낸 것은?



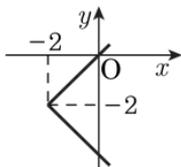
①



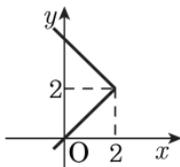
②



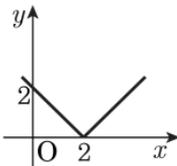
③



④



⑤



해설

$y = f(-x) + 2$ 의 그래프는 주어진 그래프를 y 축에 대칭시킨 후 y 축으로 2 만큼 평행 이동 한 것이다.

16. 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한 원을 C' 이라 하고 두 원 C, C' 위의 점을 각각 P, Q 라 할 때, 선분 PQ 의 길이의 최솟값은?

① 1

② 3

③ $7\sqrt{5} - 12$

④ 5

⑤ $11\sqrt{2} - 10$

해설

선분 PQ 의 길이가 최소가 되려면 다음 그림과 같이 두 원의 중심을 연결한 선분이

두 원과 각각 만나는 점을 P, Q 로 잡으면 된다.

이 때, 원 $C : x^2 + y^2 + 6x - 16 = 0$ 을 표준형으로 나타내면

$$(x+3)^2 + y^2 = 25 \text{ 이므로}$$

이 원의 중심은 $(-3, 0)$ 이고 반지름의 길이는 5 이다.

이 원을 직선 $x - y - 8 = 0$ 에 대하여 대칭이동한

원 C' 의 중심을 (a, b) 라 하면

두 점 $(-3, 0)$ 과 (a, b) 를 이은

선분의 중점 $\left(\frac{-3+a}{2}, \frac{b}{2}\right)$ 가

직선 $x - y - 8 = 0$ 위에 있으므로

$$\frac{a-3}{2} - \frac{b}{2} - 8 = 0$$

$$\therefore a - b = 19 \dots\dots \textcircled{A}$$

또, 직선 $x - y - 8 = 0$, 즉 $y = x - 8$ 의 기울기는 1 이고, 두 원의 중심 $(-3, 0)$, (a, b) 를 연결한 직선과 수직이므로

$$\frac{b}{a+3} = -1$$

$$\therefore a + b = -3 \dots\dots \textcircled{B}$$

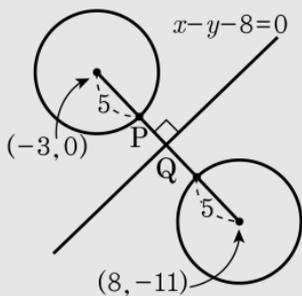
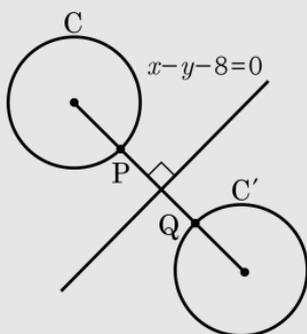
①, ②을 연립하여 풀면 $a = 8, b = -11$

따라서, 두 원의 중심 $(-3, 0)$, $(8, -11)$ 사이의 거리는

$$\sqrt{\{8 - (-3)\}^2 + \{-11 - 0\}^2} = 11\sqrt{2}$$

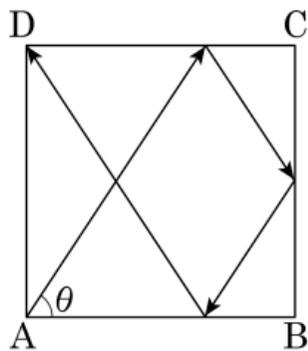
이므로 다음 그림에서 선분 PQ 의 길이의 최솟값은

$$11\sqrt{2} - 5 \times 2 = 11\sqrt{2} - 10$$



17. 다음 그림과 같이 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 발사된 빛이 꼭짓점 D로 들어올 때, $\tan \theta$ 의 값은? (단, 입사각과 반사각은 같다.)

- ① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\frac{3}{2}$
 ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ 2



해설

다음 그림에서 정사각형 ABCD의 꼭짓점 A에서 발사된 빛이 그림과 같이 꼭짓점 D에 들어올 때 $\tan \theta$ 의 값은 $\frac{3}{2}$ 이다.

