1. $x=2-\sqrt{3}i$, $y=2+\sqrt{3}i$ 일 때, x^2+y^2 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (2-\sqrt{3}i)^2+(2+\sqrt{3}i)^2 \\ &= 4-4\sqrt{3}i-3+4+4\sqrt{3}i-3 \\ &= 2 \end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= (x+y)^2-2xy \\ &= 4^2-2\cdot 7 \\ &= 16-14 \\ &= 2 \end{aligned}$$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a < -1$

해설

(두 근의 곱)$= a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$

3. 실수 $x,\ y$에 대하여 $(1+i)x+(i-1)y=2i$일 때, $x+y$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$(1+i)x+(i-1)y=2i$
$(x-y)+(x+y)i=2i$
좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0,\ x+y=2$
두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore\ x=1,\ y=1$
$\therefore\ x+y=2$

4. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$이 중근을 가질 때, 모든 실수 m의 값의 합을 구하면?

① -3　② 0　③ 2　④ 3　⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$

$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore\ m = -3,\ 5$

$\therefore\ m$의 값의 합은 $-3 + 5 = 2$

5. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$가 x에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a의 값은?

① ± 1 ② $\pm\sqrt{2}$ ③ ± 2 ④ $\pm\sqrt{3}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$이어야 한다.

$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$

$4 - 2a^2 = 0,\ a^2 = 2$

$\therefore a = \pm\sqrt{2}$

6. 임의의 두 실수 $x,\ y$에 대하여 $(x+yi)(1+2i)+(xi-y)(-1-i)-(y+i)$가 실수일 때, 좌표평면에서 점 $(x,\ y)$로 표현되는 도형과 x축, y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

① 2　　② 1　　③ $\frac{1}{2}$　　④ $\frac{1}{4}$　　⑤ $\frac{1}{6}$

해설

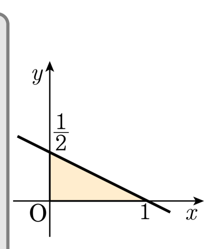
(준식) $= (2x-2y)+(x+2y-1)i = 0$

$\therefore x+2y-1=0,$

$y = -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$

$S = \frac{1}{2}\times 1\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$\therefore$ 넓이 $= \frac{1}{4}$



7. 방정식 $(k^2-3)x+1=-k(2x-1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1, 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, k_1+k_2 의 값을 구하면?

① -1 ② 3 ③ -3 ④ 1 ⑤ -2

해설

$(k^2+2k-3)x=k-1$, $(k-1)(k+3)x=k-1$

$k=1$ 일 때, $0\cdot x=0$ (부정)

$\therefore\ k_1=1$

$k=-3$ 일 때, $0\cdot x=-4$ (불능)

$\therefore\ k_2=-3$

$\therefore\ k_1+k_2=-2$

8. $|x-2|+|x-3|=1$을 만족하는 실수 x의 개수는?

① 0 개　　② 1 개　　③ 2 개
④ 3 개　　⑤ 4 개이상

해설

$|x-2|+|x-3|=1$에서
ⅰ) $x<2$일 때,
$-(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ x=2$ (성립하지 않음)
ⅱ) $2\le x<3$일 때,
$(x-2)-(x-3)=1$
$\therefore\ 0\cdot x=0$ (모든 실수)
ⅲ) $x\ge 3$일 때,
$(x-2)+(x-3)=1$
$\therefore\ x=3$

9. 연산 $*$를 $a*b=ab+2(a+b)$라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β라 한다. 이때, $|\alpha-\beta|$의 값은?

$$\boxed{(3x*x)-(3*x)+\{(-1)*2\}=0}$$

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서
$3x*x=3x\cdot x+2(3x+x)=3x^2+8x$, $3*x=3\cdot x+2(3+x)=$
$5x+6$,
$-1*2=(-1)\cdot 2+2(-1+2)=-2+2=0$
주어진 식은 $3x^2+8x-(5x+6)+0=0$
$3x^2+3x-6=0$ 에서 $3(x+2)(x-1)=0$
$\therefore x=-2$ 또는 $x=1$ $\therefore$ $|\alpha-\beta|=3$

10. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다) 에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$ax^2+bx+c=0 \leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\leftrightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\quad)=-\frac{c}{a}+(\ \text{가}\ )$$
$$\leftrightarrow \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{(\ \text{나}\ )}{4a^2}$$
$$\leftrightarrow x+\frac{b}{2a}=\frac{(\ \text{다}\ )}{2a}$$

① $\frac{b^2}{4a^2}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
② $\frac{b}{2a}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
③ $\frac{b}{2a}$, b^2-4ac, $\pm\sqrt{b^2-4ac}$
④ $\frac{b^2}{4a^2}$, $\sqrt{b^2-4ac}$, b^2-4ac
⑤ $\frac{b}{a}$, $\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac$, $\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x+\frac{b}{2a})^2 = x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}$

(나) $-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{4a^2}=-\frac{4ac}{4a^2}+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$

(다) $\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

11. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)x+2=0$$

① $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}$ ② $x=-1$ 또는 $x=-\sqrt{3}-1$
③ $x=-1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$ ④ $x=1$ 또는 $x=-\sqrt{3}+1$
⑤ $x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3}+1$을 곱하면
$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2-(\sqrt{3}+1)^2x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$2x^2-2(2+\sqrt{3})x+2(\sqrt{3}+1)=0$
$x^2-(2+\sqrt{3})x+(\sqrt{3}+1)=0$
$(x-1)\left\{x-(\sqrt{3}+1)\right\}=0$
$\therefore x=1$ 또는 $x=\sqrt{3}+1$

12. 방정식 $x^2+|x|=|x-1|+5$를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$ ② $-\sqrt{6}$ ③ 0
④ $\sqrt{6}$ ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

ⅰ) $x<0$일 때
$x^2-x=-(x-1)+5,\ x^2=6$
$\therefore x=\pm\sqrt{6}$
그런데 $x<0$이므로 $x=-\sqrt{6}$
ⅱ) $0\le x<1$일 때
$x^2+x=-(x-1)+5$
$x^2+2x-6=0$
$\therefore x=-1\pm\sqrt{7}$
그런데 $0\le x<1$이므로 해가 없다.
ⅲ) $x\ge 1$일 때,
$x^2+x=x-1+5,\ x^2=4$
$\therefore x=\pm 2$
그런데 $x\ge 1$이므로 $x=2$
ⅰ), ⅱ), ⅲ)에서 주어진 방정식의 해는
$x=2$또는 $x=-\sqrt{6}$이므로
두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

13. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$의 해를 $a \le x < b$라 할 때, $2a + b$의 값을 구하면? (단, $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$

그런데 $[x]$는 정수이므로 $[x] = 1$

$\therefore 1 \le x < 2$

$\therefore a = 1, b = 2$이므로 $2a + b = 4$

14. x에 대한 이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 한 근이 $1+i$일 때, 실수 a, b의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=-2$

▷ 정답 : $b=2$

해설

$x^2+ax+b=0$에 $x=1\pm i$를 대입하여 정리하면
$1+2i-1+a(1+i)+b=0$과
$a+b+(a+2)i=0$이다.
위 식을 정리하면 $a+b=0$과 $a+2=0$에서
$a=-2, b=2$이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.
따라서 두 근은 $1+i,\ 1-i$
근과 계수의 관계에서
$-a=(1+i)+(1-i)=2 \qquad \therefore a=-2$
$b=(1+i)(1-i)=2 \qquad \therefore b=2$

15. x에 관한 이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가질 때 $x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$의 근을 판별하면?

① 중근　　② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근　　④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2-4x-a+b=0$이 중근을 가지려면

$D'=4+a-b=0$

$\therefore b=a+4$

$x^2-2(a-1)x+a^2+3b=5a-4$

$x^2-2(a-1)x+a^2-2a+16=0$

$D'=(a-1)^2-(a^2-2a+16)=-15<0$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

16. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b는 실수, $i = \sqrt{-1}$를 좌표평면 위의 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에 대응시킬 때, $(2-3i)z$가 실수가 되게 하는 점 P가 그리는 도형은?

① 원
② 아래로 볼록한 포물선
③ 위로 볼록한 포물선
④ 기울기가 음인 직선
⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$(2-3i)z = (2-3i)(a+bi) = (2a+3b) + (2b-3a)i$$

$\therefore\ 2b - 3a = 0 \quad \therefore\ b = \frac{3}{2}a \Rightarrow$ 기울기가 양인 직선

17. α, β를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

① $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

② $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이면 $\alpha=r,\ \beta=\delta$

③ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0,\ \beta=0$

④ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$

⑤ $\alpha^2<0$

해설

① $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

② $\alpha=1,\ \beta=1$ 이면 $\alpha+\beta i=1+i$ 이고, $r=2,\ \delta=-1+i$ 이면 $r+\delta i=1+i$ 에서 $\alpha+\beta i=r+\delta i$ 이지만 $\alpha\neq r,\ \beta\neq\delta$ 이다.

③ $\alpha=1,\ \beta=i$ 이면 $\alpha^2+\beta^2=1+i^2=0$ 이지만 $\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0$ 이다.

④ $\alpha\neq 0$ 이고 $\beta\neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta=0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta=0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.

⑤ (순허수)$^2<0$ 이나 $\alpha=1+i$ 이면 $\alpha^2=(1+i)^2=2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.

따라서 옳은 것은 ④이다.

18. 자연수 n에 대하여 $1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$의 값을 모두 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답:

▶ 답:

▷ 정답: $1-i$

▷ 정답: 1

해설

$\frac{1}{i}=-i,\ \left(\frac{1}{i}\right)^3=i$

ⅰ) $n=2k$일 때,

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$
$=1-i+i-i+\cdots+i=1$

ⅱ) $n=2k-1$일 때

$1+\frac{1}{i}+\left(\frac{1}{i}\right)^3+\left(\frac{1}{i}\right)^5+\cdots+\left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$
$=1-i+i-i+\cdots-i$
$=1-i$

19. 두 실수 a, b에 대하여 복소수 $z = a + bi$와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$의 곱 $z\bar{z} = 5$일 때, $\frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right)$를 간단히 하면?

① b ② $2b$ ③ 0 ④ $5a$ ⑤ a

해설

$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$

$\therefore \frac{1}{2}\left(z + \frac{5}{z}\right) = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$

20. $\dfrac{\bar{z}+1}{z} + \dfrac{z-1}{\bar{z}} = i$를 만족하는 복소수 z에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1 ② $\pm 2i$ ③ ± 2 ④ $\pm i$ ⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$$

$$\frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2 - z}{z\bar{z}} = i$$

$$\frac{a^2 - 2abi - b^2 + a - bi + a^2 + 2abi - b^2 - a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= i$$

$$\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{-2b}{a^2 + b^2} i = i$$

$$a^2 = b^2, \ \frac{-2b}{a^2 + b^2} = +1$$

$$\therefore \ a = \pm 1, b = -1$$

$$z = \pm 1 - i \ , \ z^2 = \pm 2i$$

21. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0 \Rightarrow \omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

22. 구간 $0 < x < 5$에서 $x = \dfrac{1}{x-[x]}$를 만족시키는 x의 개수는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개 ② 3개 ③ 4개
④ 5개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$x-[x] \neq 0$이므로 x는 정수가 아니다.
주어진 식의 양변에 $x-[x]$를 곱하면
$x^2 - x[x] - 1 = 0$
(ⅰ) $0 < x < 1$일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$
$\therefore\ x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$에 속하지 않는다.
∴ 해가 없다.
(ⅱ) $1 < x < 2$일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$
$1 < x < 2$이므로 $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$
(ⅲ) $2 < x < 3$일 때 $[x] = 2$
$\therefore\ x^2 - 2x - 1 = 0$
$\therefore\ x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$
$2 < x < 3$이므로 $x = 1 + \sqrt{2}$
(ⅳ) $3 < x < 4$일 때 $[x] = 3$
$\therefore\ x^2 - 3x - 1 = 0$
$\therefore\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$
$3 < x < 4$이므로 $x = \dfrac{3+\sqrt{13}}{2}$
(ⅴ) $4 < x < 5$일 때 $[x] = 4$
$\therefore\ x^2 - 4x - 1 = 0$
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$
$4 < x < 5$이므로 $x = 2 + \sqrt{5}$
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ), (ⅳ), (ⅴ)에서 x의 개수는 4개

23. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$를 x 에 대해 정리하면
$2x^2 + (y - 1)x - y^2 + 2y + k$
이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (y - 1)^2 - 4x2(-y^2 + 2y + k)$
$\quad = 9y^2 - 18y - 8k + 1$
이 식이 완전제곱식이므로
$\dfrac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$
$\therefore k = -1$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여
$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.
전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고
문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{rr} & a+2b=-1 \\ -) & a-\ \ b=2 \\ \hline & 3b=-3 \end{array}$$

$\therefore a = 1, \quad b = -1$
$\therefore k = ab = -1$

24. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a의 값은?

① 1　　② 3　　③ 5　　④ 10　　⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$에서 근의 공식을 이용하면

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2}$$

$$= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{}$안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$가 완전제곱식이 되어야 한다.

즉, $25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$

$\therefore -4a = \pm 20$,

$a = \pm 5$

$\therefore$ 양수 a는 5

25. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$가 x, y의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a의 값은?

① $\frac{8}{49}$ ② $\frac{49}{8}$ ③ 49 ④ 8 ⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$를 x에 대해 정리하면
$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$
이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.
$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$
$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$
$4 - 200 + 32a = 0$
$\therefore\ a = \frac{49}{8}$

26. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2+bx+c=0$이라 하면
$x^2+bx+(c+1)=0$의 근은 중근이 된다.
$\therefore\ D=b^2-4(c+1)=0$
$\therefore\ b^2=4c+4\cdots\cdots$ ㉠
또, $x^2+bx+(c-3)=0$의 두 근은 $\alpha,\ 2\alpha$가 된다.
$\therefore\ \alpha+2\alpha=-b\cdots\cdots$ ㉡
$\therefore\ \alpha\cdot 2\alpha=c-3\cdots\cdots$ ㉢
㉠, ㉡, ㉢에서 $b=\pm 12,\ c=35$이므로
처음 방정식은 $x^2\pm 12x+35=0$
$\therefore\ x=-5$ 또는 $-7,\quad x=5$ 또는 7
따라서 (두 근의 제곱의 합)$=(\pm 5)^2+(\pm 7)^2=74$

27. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 <u>모두</u> 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

> ㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$이면 $\alpha = 0$이다.
>
> ㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$이면, $a = 0$이고 $\beta = 0$이다.
>
> ㉢ $\alpha = \beta$이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$는 모두 실수이다.
>
> ㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta$는 순허수이다.
>
> ㉤ $\alpha - \beta$가 실수이면 $\alpha > \beta$이다.

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢, ㉣
④ ㉠, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$\alpha = a + bi$,$\beta = c + di$ (a, b, c, d는 실수)
㉠ $\alpha = \overline{\beta} \Rightarrow \beta = \overline{\alpha}$
$\alpha\beta = 0 \ \Leftrightarrow \ \alpha\overline{\alpha} = 0$
$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$
$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$(참)
㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$
㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$(거짓)
㉣ $\alpha\overline{\beta} + \overline{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)
㉤ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0,\ b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

28. 복소수 α의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$일 때, $\alpha + \dfrac{1}{\alpha}$의 값을 구하면? (단, $i^2 = -1$)

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ ($a,\ b$ 는 실수)라 하면

$\alpha^3 = (a+bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$

$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots$ ㉠

$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots$ ㉠

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 ㉡에 대입하면

$b(9b^2 - b^2) = 1,\ 8b^3 = 1$

$\therefore\ b = \dfrac{1}{2}$

$\therefore\ a = \sqrt{3}b = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ \alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$

$\therefore\ \alpha + \dfrac{1}{\alpha} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right) + \dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i} = \sqrt{3}$

29. $x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① 0 ② $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ③ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

④ $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱해서 정리하면, $x^2-x+1=0$

$x^5+x^4+x^3+x^2+1$ 를 x^2-x+1 로 직접 나누면

몫이 x^3+2x^2+2x+1 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=(x^2-x+1)\,(x^3+2x^2+2x+1)-x$

$\therefore\ x^5+x^4+x^3+x^2+1$

$=-x\ (\because\ x^2-x+1=0)$

$=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2-x+1=0$ 을 만든 다음 양변에 $x+1$ 를 곱하면

$(x+1)(x^2-x+1)=0 \Rightarrow x^3+1=0 \Rightarrow x^3=-1$

$x^5+x^4+x^3+x^2+1=-x^2-x-1+x^2+1$

$=-x=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

30. 실수 $x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \cdots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때, $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \cdots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8　　② 16　　③ 24　　④ 36　　⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \ \cdots\ x_9 = -16$ 이므로
$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots,\ x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.
이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여
$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \cdots,\ y_m\ \ (y_i > 0)$ 이라 하고 양수인 것들은
$z_1,\ z_2,\ z_3,\ \cdots,\ z_n\ (z_i > 0)$ 이라 하자.
그러면 $y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n = 16\ (m + n = 9,\ m :$ 홀수$)$
i) $m = 4k + 1\ (k = 0,\ 1,\ 2)$ 일 때,

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+1} \\
&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\
&= 4i
\end{aligned}
$$

ii) $m = 4k + 3\ (k = 0,\ 1)$ 일 때,

$$
\begin{aligned}
(\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \cdots y_m z_1 z_2 \cdots z_n} \cdot i^{4k+3} \\
&= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\
&= -4i
\end{aligned}
$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

31. x에 대한 이차방정식 $2x^2-2(1-a-b)x+\left\{1+(a+b)^2\right\}=0$의 근이 실수일 때, $a^3+b^3-3ab+4$의 값을 구하면? (단, a, b는 실수)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4}=(1-a-b)^2-2\left\{1+(a+b)^2\right\}$$

$$=1-2(a+b)+(a+b)^2-2-2(a+b)^2\ge 0$$

$\therefore\ (a+b)^2+2(a+b)+1\le 0$

즉, $(a+b+1)^2\le 0$이고 $a,\ b$는 실수이므로

$a+b+1=0$

$\therefore\ a+b=-1$

$\therefore\ a^3+b^3-3ab+4$

$=(a+b)^3-3ab(a+b)-3ab+4$

$=(-1)^3-3ab(-1)-3ab+4$

$=3$

32. 0이 아닌 세 실수 a, b, c가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$의 한 근을 복소수 α라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$	㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$
㉢ $\frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$	㉣ $\alpha^2 = \overline{\alpha}$

① ㉠, ㉡　　② ㉠, ㉡, ㉢　　③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak,\ c = bk,\ a = ck$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore\ a = b = c$

$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 $\overline{\alpha}$이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \overline{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\overline{\alpha} = 1,\ \frac{1}{\alpha} = \overline{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$의 근을 구해보면

$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \overline{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\therefore\ \alpha^2 = \overline{\alpha}$

33. x에 대한 이차방정식 $x^2+2mx+2m^2+m-2=0$이 두 실근 α, β를 가질 때, $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$를 m에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

① 최대값 : 8, 최소값 : 2
② 최대값 : 10, 최소값 : 3
③ 최대값 : 12, 최소값 : $\frac{15}{8}$
④ 최대값 : 11, 최소값 : $\frac{21}{8}$
⑤ 최대값 : 13, 최소값 : $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로
$D/4 = m^2-(2m^2+m-2) \geq 0$에서 $-2 \leq m \leq 1$
$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=2m^2+m-2$이므로
$\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta$
$=(-2m)^2-(2m^2+m-2)$
$=2m^2-m+2$
$=2\left(m-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}(-2 \leq m \leq 1)$
$\therefore m=\frac{1}{4}$일 때, 최솟값 $\frac{15}{8}$
$m=-2$일 때, 최댓값 12

34. 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 근 $\alpha,\ \beta$를 갖는다. $f(x)=x^2+bx+a$에 대하여 $f(\alpha)=\beta,\ f(\beta)=\alpha$가 성립할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② −1　③ −2　④ −3　⑤ −4

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-a,\ \alpha\beta=b$

$f(\alpha)=\alpha^2+b\alpha+a=\beta\cdots$ ㉠

$f(\beta)=\beta^2+b\beta+a=\alpha\cdots$ ㉡

㉠ − ㉡하면

$\alpha^2-\beta^2+b(\alpha-\beta)=\beta-\alpha$

$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta+b+1)=0$

$\alpha\neq\beta$이므로 $\alpha+\beta+b+1=0$

$\therefore\ -a+b+1=0\cdots$ ㉢

㉠ + ㉡하면

$\alpha^2+\beta^2+b(\alpha+\beta)+2\alpha=\alpha+\beta$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(b-1)(\alpha+\beta)+2a=0$

$\therefore\ a^2-2b-a(b-1)+2a=0\cdots$ ㉣

㉢에서 $b=a-1$을 ㉣에 대입하면

$a^2-2(a-1)-a(a-1-1)+2a=0,\ 2a+2=0$

$\therefore\ a=-1,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

35. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 해를 $p, q\ (-1<p<0<q<1)$라 하자. 이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 해를 $r, s(r<s)$라 할 때, p, q, r, s의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p<q<r<s$

② $r<s<p<q$

③ $p<r<s<q$

④ $r<p<q<s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$p+q=-\frac{b}{a},\ pq=\frac{c}{a}$$

$$\text{따라서, } r+s=\frac{b}{c}=\frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=-\frac{p+q}{pq}$$

$$=\left(-\frac{1}{p}\right)+\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots ㉠$$

$$rs=\frac{a}{c}=\frac{1}{pq}=\left(-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{q}\right)\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서 $\{r,\ s\}=\left\{-\frac{1}{p},\ -\frac{1}{q}\right\}$

$-1<p<0$에서 $-\frac{1}{p}>1$, $0<q<1$ 에서 $-\frac{1}{q}<-1$

$\therefore\ r=-\frac{1}{q}<-1<p<q<1<-\frac{1}{p}=s$