

1. $x = 2 - \sqrt{3}i$, $y = 2 + \sqrt{3}i$ 일 때, $x^2 + y^2$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (2 - \sqrt{3}i)^2 + (2 + \sqrt{3}i)^2 \\&= 4 - 4\sqrt{3}i - 3 + 4 + 4\sqrt{3}i - 3 \\&= 2\end{aligned}$$

해설

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)^2 - 2xy \\&= 4^2 - 2 \cdot 7 \\&= 16 - 14 \\&= 2\end{aligned}$$

2. 이차방정식 $x^2 - 2x + a + 1 = 0$ 의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a < -1$

해설

$$(\text{두 근의 곱}) = a + 1 < 0 \quad \therefore a < -1$$

3. 실수 x, y 에 대하여 $(1+i)x + (i-1)y = 2i$ 일 때, $x+y$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$(1+i)x + (i-1)y = 2i$$

$$(x-y) + (x+y)i = 2i$$

좌변과 우변이 같아야 하므로, $x-y=0$, $x+y=2$

두 식을 연립하여 풀어주면, $\therefore x=1, y=1$

$$\therefore x+y=2$$

4. 이차방정식 $x^2 + (m+1)x + m + 4 = 0$ 이 중근을 가질 때, 모든 실수 m 의 값의 합을 구하면?

① -3

② 0

③ 2

④ 3

⑤ 5

해설

중근을 가지므로, 판별식 $D = 0$

$$D = (m+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (m+4) = m^2 - 2m - 15 = 0$$

$$(m-5)(m+3) = 0 \quad \therefore m = -3, 5$$

$$\therefore m \text{의 값의 합은 } -3 + 5 = 2$$

5. 이차식 $ax^2 + 4x + 2a$ 가 x 에 대한 완전제곱식이 되도록 하는 실수 a 의 값은?

① ± 1

② $\pm \sqrt{2}$

③ ± 2

④ $\pm \sqrt{3}$

⑤ $\pm \sqrt{5}$

해설

주어진 식이 x 에 대한 완전제곱식이 되려면
판별식 $D = 0$ 이어야 한다.

$$\frac{D}{4} = 2^2 - a \cdot 2a = 0$$

$$4 - 2a^2 = 0, a^2 = 2$$

$$\therefore a = \pm \sqrt{2}$$

6. 임의의 두 실수 x, y 에 대하여 $(x+yi)(1+2i) + (xi-y)(-1-i) - (y+i)$ 가 실수일 때, 좌표평면에서 점 (x, y) 로 표현되는 도형과 x 축, y 축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구하면?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

해설

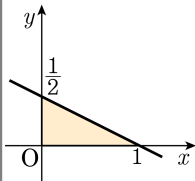
$$(\text{준식}) = (2x - 2y) + (x + 2y - 1)i = 0$$

$$\therefore x + 2y - 1 = 0,$$

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{넓이} = \frac{1}{4}$$



7. 방정식 $(k^2 - 3)x + 1 = -k(2x - 1)$ 에 대하여 해가 무수히 많이 존재하기 위한 k 의 값을 k_1 , 해가 존재하지 않기 위한 k 의 값을 k_2 라 할 때, $k_1 + k_2$ 의 값을 구하면?

① -1

② 3

③ -3

④ 1

⑤ -2

해설

$$(k^2 + 2k - 3)x = k - 1, \quad (k - 1)(k + 3)x = k - 1$$

$k = 1$ 일 때, $0 \cdot x = 0$ (부정)

$$\therefore k_1 = 1$$

$k = -3$ 일 때, $0 \cdot x = -4$ (불능)

$$\therefore k_2 = -3$$

$$\therefore k_1 + k_2 = -2$$

8. $|x-2| + |x-3| = 1$ 을 만족하는 실수 x 의 개수는?

① 0개

② 1개

③ 2개

④ 3개

⑤ 4개이상

해설

$|x-2| + |x-3| = 1$ 에서

i) $x < 2$ 일 때,

$$-(x-2) - (x-3) = 1$$

$\therefore x = 2$ (성립하지 않음)

ii) $2 \leq x < 3$ 일 때,

$$(x-2) - (x-3) = 1$$

$\therefore 0 \cdot x = 0$ (모든 실수)

iii) $x \geq 3$ 일 때,

$$(x-2) + (x-3) = 1$$

$\therefore x = 3$

9. 연산 $*$ 를 $a * b = ab + 2(a + b)$ 라 정의할 때, 다음 방정식의 두 근을 α, β 라 한다. 이때, $|\alpha - \beta|$ 의 값은?

$$(3x * x) - (3 * x) + \{(-1) * 2\} = 0$$

① 0

② 1

③ 2

④ 3

⑤ 4

해설

연산 $*$ 의 정의에 따라서

$$3x * x = 3x \cdot x + 2(3x + x) = 3x^2 + 8x, \quad 3 * x = 3 \cdot x + 2(3 + x) = 5x + 6,$$

$$-1 * 2 = (-1) \cdot 2 + 2(-1 + 2) = -2 + 2 = 0$$

$$\text{주어진 식은 } 3x^2 + 8x - (5x + 6) + 0 = 0$$

$$3x^2 + 3x - 6 = 0 \text{ 에서 } 3(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = -2 \text{ 또는 } x = 1 \quad \therefore |\alpha - \beta| = 3$$

10. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근의 공식을 유도하는 과정이다. (가), (나), (다)에 알맞은 식을 차례대로 쓰면?

$$\begin{aligned}
 ax^2 + bx + c = 0 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\
 &\leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + (\quad) = -\frac{c}{a} + (\text{가}) \\
 &\leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{(\text{나})}{4a^2} \\
 &\leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \frac{(\text{다})}{2a}
 \end{aligned}$$

- ① $\frac{b^2}{4a^2}, b^2 - 4ac, \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
 ② $\frac{b}{2a}, \sqrt{b^2 - 4ac}, b^2 - 4ac$
 ③ $\frac{b}{2a}, b^2 - 4ac, \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$
 ④ $\frac{b^2}{4a^2}, \sqrt{b^2 - 4ac}, b^2 - 4ac$
 ⑤ $\frac{b}{a}, \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}$

해설

(가) 좌변을 제곱 꼴로 만들려 하는 것이므로 $(x + \frac{b}{2a})^2 =$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$(나) -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$(다) \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

11. 다음 방정식을 풀면?

$$(\sqrt{3}-1)x^2 - (\sqrt{3}+1)x + 2 = 0$$

① $x = -1$ 또는 $x = -\sqrt{3}$

② $x = -1$ 또는 $x = -\sqrt{3} - 1$

③ $x = -1$ 또는 $x = \sqrt{3} + 1$

④ $x = 1$ 또는 $x = -\sqrt{3} + 1$

⑤ $x = 1$ 또는 $x = \sqrt{3} + 1$

해설

x^2 의 계수를 유리수로 만들기 위해 양변에 $\sqrt{3} + 1$ 을 곱하면

$$(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)x^2 - (\sqrt{3}+1)^2x + 2(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$2x^2 - 2(2 + \sqrt{3})x + 2(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$x^2 - (2 + \sqrt{3})x + (\sqrt{3}+1) = 0$$

$$(x-1) \{x - (\sqrt{3}+1)\} = 0$$

$$\therefore x = 1 \text{ 또는 } x = \sqrt{3} + 1$$

12. 방정식 $x^2 + |x| = |x - 1| + 5$ 를 만족하는 두 근의 곱은?

① $-2\sqrt{6}$

② $-\sqrt{6}$

③ 0

④ $\sqrt{6}$

⑤ $2\sqrt{6}$

해설

i) $x < 0$ 일 때

$$x^2 - x = -(x - 1) + 5, x^2 = 6$$

$$\therefore x = \pm\sqrt{6}$$

그런데 $x < 0$ 이므로 $x = -\sqrt{6}$

ii) $0 \leq x < 1$ 일 때

$$x^2 + x = -(x - 1) + 5$$

$$x^2 + 2x - 6 = 0$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{7}$$

그런데 $0 \leq x < 1$ 이므로 해가 없다.

iii) $x \geq 1$ 일 때,

$$x^2 + x = x - 1 + 5, x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

그런데 $x \geq 1$ 이므로 $x = 2$

i), ii), iii)에서 주어진 방정식의 해는

$x = 2$ 또는 $x = -\sqrt{6}$ 이므로

두 근의 곱은 $-2\sqrt{6}$

13. 방정식 $2[x]^2 - [x] - 1 = 0$ 의 해를 $a \leq x < b$ 라 할 때, $2a + b$ 의 값을 구하면? (단, $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수이다.)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

$$2[x]^2 - [x] - 1 = (2[x] + 1)([x] - 1) = 0$$

그런데 $[x]$ 는 정수이므로 $[x] = 1$

$$\therefore 1 \leq x < 2$$

$$\therefore a = 1, b = 2 \text{ 이므로 } 2a + b = 4$$

14. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + i$ 일 때, 실수 a, b 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 2$

해설

$x^2 + ax + b = 0$ 에 $x = 1 \pm i$ 를 대입하여 정리하면

$1 + 2i - 1 + a(1 + i) + b = 0$ 과

$a + b + (a + 2)i = 0$ 이다.

위 식을 정리하면 $a + b = 0$ 과 $a + 2 = 0$ 에서

$a = -2, b = 2$ 이다.

해설

계수가 실수이므로 한 근이 복소수 근이면 켤레복소수 근을 갖는다.

따라서 두 근은 $1 + i, 1 - i$

근과 계수의 관계에서

$$-a = (1 + i) + (1 - i) = 2 \quad \therefore a = -2$$

$$b = (1 + i)(1 - i) = 2 \quad \therefore b = 2$$

15. x 에 관한 이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가질 때 $x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$ 의 근을 판별하면?

① 중근

② 한 실근과 한 허근

③ 서로 다른 두 실근

④ 서로 같은 두 실근

⑤ 서로 다른 두 허근

해설

이차방정식 $x^2 - 4x - a + b = 0$ 이 중근을 가지려면

$$D' = 4 + a - b = 0$$

$$\therefore b = a + 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 + 3b = 5a - 4$$

$$x^2 - 2(a - 1)x + a^2 - 2a + 16 = 0$$

$$D' = (a - 1)^2 - (a^2 - 2a + 16) = -15 < 0$$

$\therefore$ 주어진 이차방정식은 서로 다른 두 허근을 갖는다.

16. 복소수 $z = a + bi$ (단, a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$ 를 좌표평면 위의 점 $P(a, b)$ 에 대응시킬 때, $(2 - 3i)z$ 가 실수가 되게 하는 점 P 가 그리는 도형은?

① 원

② 아래로 볼록한 포물선

③ 위로 볼록한 포물선

④ 기울기가 음인 직선

⑤ 기울기가 양인 직선

해설

$$\begin{aligned}(2 - 3i)z &= (2 - 3i)(a + bi) \\ &= (2a + 3b) + (2b - 3a)i\end{aligned}$$

$$\therefore 2b - 3a = 0 \quad \therefore b = \frac{3}{2}a \Rightarrow \text{기울기가 양인 직선}$$

17. α, β 를 복소수라 할 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$
- ② $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이면 $\alpha = r, \beta = \delta$
- ③ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$
- ④ $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$
- ⑤ $\alpha^2 < 0$

해설

- ① $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.
 - ② $\alpha = 1, \beta = 1$ 이면 $\alpha + \beta i = 1 + i$ 이고, $r = 2, \delta = -1 + i$ 이면 $r + \delta i = 1 + i$ 에서 $\alpha + \beta i = r + \delta i$ 이지만 $\alpha \neq r, \beta \neq \delta$ 이다.
 - ③ $\alpha = 1, \beta = i$ 이면 $\alpha^2 + \beta^2 = 1 + i^2 = 0$ 이지만 $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ 이다.
 - ④ $\alpha \neq 0$ 이고 $\beta \neq 0$ 이라 가정하고 $\alpha\beta = 0$ 의 양변에 $\frac{1}{\alpha}$ 을 곱하면 $\beta = 0$ 이 되어 모순이다. 따라서 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 또는 $\beta = 0$ 이다.
 - ⑤ (순허수)² < 0 이나 $\alpha = 1 + i$ 이면 $\alpha^2 = (1 + i)^2 = 2i$ 가 되어 양수도 음수도 아니다.
- 따라서 옳은 것은 ④이다.

18. 자연수 n 에 대하여 $1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1}$ 의 값을 모두 구하여라. (단, $i = \sqrt{-1}$)

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $1 - i$

▷ 정답 : 1

해설

$$\frac{1}{i} = -i, \quad \left(\frac{1}{i}\right)^3 = i$$

i) $n = 2k$ 일 때,

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots + i = 1 \end{aligned}$$

ii) $n = 2k - 1$ 일 때

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{i}\right)^3 + \left(\frac{1}{i}\right)^5 + \cdots + \left(\frac{1}{i}\right)^{2n-1} \\ &= 1 - i + i - i + \cdots - i \\ &= 1 - i \end{aligned}$$

19. 두 실수 a, b 에 대하여 복소수 $z = a + bi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = a - bi$ 의 곱 $z\bar{z} = 5$ 일 때, $\frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right)$ 를 간단히 하면?

① b

② $2b$

③ 0

④ $5a$

⑤ a

해설

$$z\bar{z} = 5, \quad \bar{z} = \frac{5}{z}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(z + \frac{5}{z} \right) = \frac{1}{2} (z + \bar{z}) = \frac{1}{2} \times 2a = a$$

20. $\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$ 를 만족하는 복소수 z 에 대하여 z^2 의 값을 구하면?

① ± 1

② $\pm 2i$

③ ± 2

④ $\pm i$

⑤ 0

해설

$$\begin{cases} z = a + bi \\ z = a - bi \end{cases}$$

$$\frac{\bar{z}+1}{z} + \frac{z-1}{\bar{z}} = i$$

$$\frac{\bar{z}^2 + \bar{z} + z^2 - z}{z\bar{z}} = i$$

$$\frac{a^2 - 2abi - b^2 + a - bi + a^2 + 2abi - b^2 - a - bi}{a^2 + b^2}$$

$$= i$$

$$\frac{2(a^2 - b^2)}{a^2 + b^2} + \frac{-2b}{a^2 + b^2}i = i$$

$$a^2 = b^2, \frac{-2b}{a^2 + b^2} = +1$$

$$\therefore a = \pm 1, b = -1$$

$$z = \pm 1 - i, z^2 = \pm 2i$$

21. $\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^{10} + \left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^8$ 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

③ 1

④ 0

⑤ -1

해설

$$\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad 2\omega + 1 = \sqrt{3}i$$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \Rightarrow \omega^3 = 1$$

$$(\omega^3)^3 \cdot \omega + (\omega^3)^2 \cdot \omega^2 = \omega + \omega^2 = -1$$

22. 구간 $0 < x < 5$ 에서 $x = \frac{1}{x - [x]}$ 를 만족시키는 x 의 개수는? (단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대의 정수)

① 2개

② 3개

③ 4개

④ 5개

⑤ 무수히 많다.

해설

$x - [x] \neq 0$ 이므로 x 는 정수가 아니다.

주어진 식의 양변에 $x - [x]$ 를 곱하면

$$x^2 - x[x] - 1 = 0$$

(i) $0 < x < 1$ 일 때 $[x] = 0$, $x^2 - 1 = 0$

$\therefore x = \pm 1$, 이 값은 $0 < x < 1$ 에 속하지 않는다.

$\therefore$ 해가 없다.

(ii) $1 < x < 2$ 일 때 $[x] = 1$, $x^2 - x - 1 = 0$

$$\therefore x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$1 < x < 2 \text{이므로 } x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

(iii) $2 < x < 3$ 일 때 $[x] = 2$

$$\therefore x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$\therefore x = 1 \pm \sqrt{1+1} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$2 < x < 3 \text{이므로 } x = 1 + \sqrt{2}$$

(iv) $3 < x < 4$ 일 때 $[x] = 3$

$$\therefore x^2 - 3x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$3 < x < 4 \text{이므로 } x = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

(v) $4 < x < 5$ 일 때 $[x] = 4$

$$\therefore x^2 - 4x - 1 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$$

$$4 < x < 5 \text{이므로 } x = 2 + \sqrt{5}$$

(i), (ii), (iii), (iv), (v)에서 x 의 개수는 4개

23. x, y 에 대한 이차식 $2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 가 x, y 에 대한 일차식의 곱으로 인수분해 될 때, 상수 k 의 값은 ?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

해설

$2x^2 + xy - y^2 - x + 2y + k$ 를 x 에 대해 정리하면

$$2x^2 + (y-1)x - y^2 + 2y + k$$

이 식이 일차식의 곱으로 인수분해 되려면

판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (y-1)^2 - 4 \times 2(-y^2 + 2y + k)$$

$$= 9y^2 - 18y - 8k + 1$$

이 식이 완전제곱식이므로

$$\frac{D'}{4} = 9^2 + 9(-8k + 1)$$

$$\therefore k = -1$$

해설

일차식의 곱으로 이루어져있으므로, 이차항을 이용하여

$(2x - y + a)(x + y + b)$ 로 나타낼 수 있다.

전개하면, $2x^2 + xy - y^2 + (a + 2b)x + (a - b)y + ab$ 이고

문제에 주어진 식과 같아야 되므로,

$$\begin{array}{r} a+2b=-1 \\ -) a-b=2 \\ \hline 3b=-3 \end{array}$$

$$\therefore a = 1, b = -1$$

$$\therefore k = ab = -1$$

24. 이차식 $x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1$ 이 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 양수 a 의 값은?

① 1

② 3

③ 5

④ 10

⑤ 12

해설

$x^2 - xy - 6y^2 + ay - 1 = 0$ 에서 근의 공식을 이용하면

$$\begin{aligned}x &= \frac{y \pm \sqrt{y^2 - 4(-6y^2 + ay - 1)}}{2} \\&= \frac{y \pm \sqrt{25y^2 - 4ay + 4}}{2}\end{aligned}$$

일차식의 곱으로 인수분해가 되려면 $\sqrt{\quad}$ 안에 있는

$25y^2 - 4ay + 4$ 가 완전제곱식이 되어야 한다.

$$\text{즉, } 25y^2 - 4ay + 4 = (5y \pm 2)^2$$

$$\therefore -4a = \pm 20,$$

$$a = \pm 5$$

$\therefore$ 양수 a 는 5

25. $x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값은?

① $\frac{8}{49}$

② $\frac{49}{8}$

③ 49

④ 8

⑤ 0

해설

$x^2 + 5xy + ay^2 + y - 2$ 를 x 에 대해 정리하면

$$x^2 + 5yx + ay^2 + y - 2$$

이 이차식이 두 개의 일차식으로 인수분해 되려면
판별식이 완전제곱식이 되어야 한다.

$$D = (25 - 4a)y^2 - 4y + 8$$

$$\frac{D'}{4} = 4 - 8(25 - 4a) = 0,$$

$$4 - 200 + 32a = 0$$

$$\therefore a = \frac{49}{8}$$

26. 이차항의 계수가 1인 이차방정식에서 상수항을 1만큼 크게 하면 두 근이 같고, 상수항을 3만큼 작게 하면 한 근은 다른 근의 두 배가 된다고 한다. 이 때, 처음 방정식의 두 근의 제곱의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 74

해설

처음 방정식을 $x^2 + bx + c = 0$ 이라 하면

$x^2 + bx + (c + 1) = 0$ 의 근은 중근이 된다.

$$\therefore D = b^2 - 4(c + 1) = 0$$

$$\therefore b^2 = 4c + 4 \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

또, $x^2 + bx + (c - 3) = 0$ 의 두 근은 α , 2α 가 된다.

$$\therefore \alpha + 2\alpha = -b \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

$$\therefore \alpha \cdot 2\alpha = c - 3 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

㉠, ㉡, ㉢에서 $b = \pm 12$, $c = 35$ 이므로

처음 방정식은 $x^2 \pm 12x + 35 = 0$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } -7, \quad x = 5 \text{ 또는 } 7$$

$$\text{따라서 (두 근의 제곱의 합)} = (\pm 5)^2 + (\pm 7)^2 = 74$$

27. α, β 가 복소수일 때, 다음 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, α 는 α 의 켤레복소수, $\bar{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha = \bar{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

㉡ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면, $a = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

㉢ $\alpha = \beta$ 이면, $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta$ 는 순허수이다.

㉥ $\alpha - \beta$ 가 실수이면 $\alpha > \beta$ 이다.

① ㉠

② ㉠, ㉡

③ ㉡, ㉢, ㉤

④ ㉠, ㉢, ㉤

⑤ ㉠, ㉢, ㉤, ㉥

해설

$\alpha = a + bi, \beta = c + di$ (a, b, c, d 는 실수)

㉠ $\alpha = \bar{\beta} \Rightarrow \beta = \bar{\alpha}$

$\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha\bar{\alpha} = 0$

$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = 0$

$\therefore a = 0, b = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ (참)

㉡ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$

㉢ $\alpha + \beta = 2a + 2bi, \alpha\beta = (a^2 - b^2) + 2abi$ (거짓)

㉤ $\alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = 2(ac + bd) \Rightarrow$ 실수 (거짓)

㉥ $\alpha - \beta = (a - c) + (b - d)i \therefore b - d = 0, b = d$ $\alpha > \beta$ 는 알 수 없다(거짓)

28. 복소수 α 의 실수부가 양이고, $\alpha^3 = i$ 일 때, $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ 의 값을 구하면?
(단, $i^2 = -1$)

① 1

② $\sqrt{2}$

③ $\sqrt{3}$

④ 2

⑤ $\sqrt{5}$

해설

$\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수)라 하면

$$\alpha^3 = (a + bi)^3 = a^3 - 3ab^2 + (3a^2b - b^3)i = i$$

$$a(a^2 - 3b^2) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$b(3a^2 - b^2) = 1 \cdots \textcircled{2}$$

$a > 0$ 이므로 $a^2 = 3b^2$ 을 $\textcircled{2}$ 에 대입하면

$$b(9b^2 - b^2) = 1, 8b^3 = 1$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

$$\therefore a = \sqrt{3}b = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\therefore \alpha + \frac{1}{\alpha} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i} = \sqrt{3}$$

29. $x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 의 값은? (단, $i = \sqrt{-1}$)

① 0

② $\frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$

③ $\frac{1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

⑤ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ 의 양변에 2를 곱하고 1을 이항한 후 양변을 제곱

해서 정리하면, $x^2 - x + 1 = 0$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$ 를 $x^2 - x + 1$ 로 직접 나누면

몫이 $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$ 이고 나머지는 $-x$ 이다.

즉, $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= (x^2 - x + 1)(x^3 + 2x^2 + 2x + 1) - x$

$\therefore x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$

$= -x (\because x^2 - x + 1 = 0)$

$= \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 을 만든 다음 양변에 $x + 1$ 를 곱하면

$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0 \Rightarrow x^3 + 1 = 0 \Rightarrow x^3 = -1$

$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = -x^2 - x - 1 + x^2 + 1$

$= -x = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

30. 실수 $x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 가 $16 + x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = 0$ 을 만족할 때,
 $\sqrt{x_1} \times \sqrt{x_2} \times \dots \times \sqrt{x_9}$ 의 값들의 곱을 구하면?

① 8

② 16

③ 24

④ 36

⑤ 14

해설

$x_1 \times x_2 \times \dots \times x_9 = -16$ 이므로

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_9$ 중에서 음수의 개수는 홀수개이다.

이 중에서 음수인 것들은 그 절대값을 취하여

$y_1, y_2, y_3, \dots, y_m$ ($y_i > 0$) 이라 하고 양수인 것들은

$z_1, z_2, z_3, \dots, z_n$ ($z_i > 0$) 이라 하자.

그러면 $y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n = 16$ ($m + n = 9, m : \text{홀수}$)

i) $m = 4k + 1$ ($k = 0, 1, 2$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+1} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i \\ &= 4i \end{aligned}$$

ii) $m = 4k + 3$ ($k = 0, 1$) 일 때,

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= \sqrt{y_1 y_2 \dots y_m z_1 z_2 \dots z_n} \cdot i^{4k+3} \\ &= \sqrt{16} \times (i^4)^k \times i^3 \\ &= -4i \end{aligned}$$

$\therefore$ i), ii) 에서 $4i \times (-4i) = 16$

31. x 에 대한 이차방정식 $2x^2 - 2(1-a-b)x + \{1 + (a+b)^2\} = 0$ 의 근이 실수일 때, $a^3 + b^3 - 3ab + 4$ 의 값을 구하면? (단, a, b 는 실수)

① 1

② 2

③ 3

④ 4

⑤ 5

해설

실근을 가지므로

$$\frac{D}{4} = (1-a-b)^2 - 2\{1 + (a+b)^2\}$$

$$= 1 - 2(a+b) + (a+b)^2 - 2 - 2(a+b)^2 \geq 0$$

$$\therefore (a+b)^2 + 2(a+b) + 1 \leq 0$$

즉, $(a+b+1)^2 \leq 0$ 이고 a, b 는 실수이므로

$$a+b+1=0$$

$$\therefore a+b=-1$$

$$\therefore a^3 + b^3 - 3ab + 4$$

$$= (a+b)^3 - 3ab(a+b) - 3ab + 4$$

$$= (-1)^3 - 3ab(-1) - 3ab + 4$$

$$= 3$$

32. 0이 아닌 세 실수 a, b, c 가 $\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c}$ 를 만족할 때, 이차방정식 $cx^2 + bx + a = 0$ 의 한 근을 복소수 α 라 하자. 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면?

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

㉢ $\frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$

㉣ $\alpha^2 = \bar{\alpha}$

① ㉠, ㉡

② ㉠, ㉡, ㉢

③ ㉠, ㉢, ㉣

④ ㉡, ㉢, ㉣

⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{b} = \frac{a}{c} = k \Rightarrow b = ak, c = bk, a = ck$$

변변끼리 곱하면 $abc = abck^3$

$abc \neq 0$ 이므로 $k^3 = 1$

$\therefore k = 1 \quad \therefore a = b = c$

$$cx^2 + bx + a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0$$

한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 $\bar{\alpha}$ 이다

㉠ $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

㉡ $\alpha + \bar{\alpha} = -1$

㉢ $\alpha\bar{\alpha} = 1, \frac{1}{\alpha} = \bar{\alpha}$

㉣ $x^2 + x + 1 = 0$ 의 근을 구해보면

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \bar{\alpha} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$\therefore \alpha^2 = \bar{\alpha}$

33. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2mx + 2m^2 + m - 2 = 0$ 이 두 실근 α, β 를 가질 때, $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$ 를 m 에 대한 식으로 나타내고, 이 식의 최댓값과 최솟값을 구하면?

- ① 최댓값: 8, 최솟값: 2 ② 최댓값: 10, 최솟값: 3
 ③ 최댓값: 12, 최솟값: $\frac{15}{8}$ ④ 최댓값: 11, 최솟값: $\frac{21}{8}$
 ⑤ 최댓값: 13, 최솟값: $\frac{7}{8}$

해설

주어진 방정식이 실근을 가지므로

$$D/4 = m^2 - (2m^2 + m - 2) \geq 0 \text{에서 } -2 \leq m \leq 1$$

$$\alpha + \beta = -2m, \alpha\beta = 2m^2 + m - 2 \text{이므로}$$

$$\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta$$

$$= (-2m)^2 - (2m^2 + m - 2)$$

$$= 2m^2 - m + 2$$

$$= 2 \left(m - \frac{1}{4} \right)^2 + \frac{15}{8} \quad (-2 \leq m \leq 1)$$

$$\therefore m = \frac{1}{4} \text{일 때, 최솟값 } \frac{15}{8}$$

$$m = -2 \text{일 때, 최댓값 } 12$$

34. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 은 서로 다른 두 근 α, β 를 갖는다.
 $f(x) = x^2 + bx + a$ 에 대하여 $f(\alpha) = \beta, f(\beta) = \alpha$ 가 성립할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

⑤ -4

해설

근과 계수와의 관계에서

$$\alpha + \beta = -a, \alpha\beta = b$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 + b\alpha + a = \beta \cdots \textcircled{㉠}$$

$$f(\beta) = \beta^2 + b\beta + a = \alpha \cdots \textcircled{㉡}$$

$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 - \beta^2 + b(\alpha - \beta) = \beta - \alpha$$

$$(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + b + 1) = 0$$

$$\alpha \neq \beta \text{이므로 } \alpha + \beta + b + 1 = 0$$

$$\therefore -a + b + 1 = 0 \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡}$ 하면

$$\alpha^2 + \beta^2 + b(\alpha + \beta) + 2a = \alpha + \beta$$

$$(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + (b - 1)(\alpha + \beta) + 2a = 0$$

$$\therefore a^2 - 2b - a(b - 1) + 2a = 0 \cdots \textcircled{㉣}$$

$\textcircled{㉢}$ 에서 $b = a - 1$ 을 $\textcircled{㉣}$ 에 대입하면

$$a^2 - 2(a - 1) - a(a - 1 - 1) + 2a = 0, 2a + 2 = 0$$

$$\therefore a = -1, b = -2$$

$$\therefore a + b = -3$$

35. 계수가 실수인 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 해를 p, q ($-1 < p < 0 < q < 1$)라 하자. 이차방정식 $cx^2 - bx + a = 0$ 의 해를 r, s ($r < s$)라 할 때, p, q, r, s 의 대소 관계를 바르게 나타낸 것은?

① $p < q < r < s$

② $r < s < p < q$

③ $p < r < s < q$

④ $r < p < q < s$

⑤ 이 조건만으로는 알 수 없다.

해설

근과 계수와의 관계에 의하여

$$p + q = -\frac{b}{a}, \quad pq = \frac{c}{a}$$

$$\begin{aligned} \text{따라서, } r + s &= \frac{b}{c} = \frac{\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}} = -\frac{p+q}{pq} \\ &= \left(-\frac{1}{p}\right) + \left(-\frac{1}{q}\right) \cdots \textcircled{\text{㉠}} \end{aligned}$$

$$rs = \frac{a}{c} = \frac{1}{pq} = \left(-\frac{1}{p}\right) \left(-\frac{1}{q}\right) \cdots \textcircled{\text{㉡}}$$

$$\textcircled{\text{㉠}}, \textcircled{\text{㉡}} \text{에서 } \{r, s\} = \left\{-\frac{1}{p}, -\frac{1}{q}\right\}$$

$$-1 < p < 0 \text{에서 } -\frac{1}{p} > 1, \quad 0 < q < 1 \text{에서 } -\frac{1}{q} < -1$$

$$\therefore r = -\frac{1}{q} < -1 < p < q < 1 < -\frac{1}{p} = s$$