1. $x^2 - 5x + 6 = 0$의 근을 근의 공식을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 2$

▷ 정답 : $x = 3$

해설

$x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \times 1 \times 6}}{2} = \dfrac{5 \pm 1}{2}$

$\therefore x = 2$ 또는 $x = 3$

2. 복소수 $z = (2+i)a^2 + (1+4i)a + 2(2i-3)$ 이 순허수일 때, 실수 a 의 값은?

① -2 ② 1 ③ $\frac{3}{2}$ ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$z = (2a^2 + a - 6) + (a^2 + 4a + 4)i$
순허수이므로 $2a^2 + a - 6 = 0$
$\Rightarrow \quad (a+2)(2a-3) = 0$
$\Leftrightarrow \ a = -2$ 또는 $a = \frac{3}{2}$
그런데 $a = 2$ 이면,
$a^2 + 4a + 4 = 0$ 이 되어 순허수가 성립되지 않는다.
$\therefore \quad a = \frac{3}{2}$

3. $i^2 = -1$ 이라 할 때, 다음 중 제곱하여 음수가 되는 수의 개수는 ?

$-2,\quad -\sqrt{2},\quad 2i,\quad -2i,$ $3i,\quad -3i,\quad 1-i,\quad 1+i$

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$i^2 = -1$ 이므로 제곱해서 음수가 되는 수는 순허수, 즉 $ai(a \neq 0)$ 의 꼴이 되어야 한다.
$\therefore\ 2i,\ -2i,\ 3i,\ -3i$ 4개,
$2, -\sqrt{2}$ 는 실수이므로
$(\text{실수})^2 \geq 0$, $(1 \pm i)^2 = 1 \pm 2i - 1 = \pm 2i$ 가 된다.

4. x에 대한 이차방정식 $(m+3)x^2-4mx+2m-1=0$이 중근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 합은?

① $-\frac{5}{2}$ ② $-\frac{3}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설

주어진 이차방정식의 판별식을 D라고 하면 중근을 가질 조건은 $D=0$이므로

$\frac{D}{4}=(-2m)^2-(m+3)(2m-1)=0$

$4m^2-(2m^2+5m-3)=0$

$2m^2-5m+3=0$

$(m-1)(2m-3)=0$

$\therefore m=1$ 또는 $\frac{3}{2}$

$\therefore 1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

5. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7) + 3 = 0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(i) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2 의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ii) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D < 0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4 \cdot (1-k) \cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\frac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

6. 등식 $(x+yi)(z-i)=10$을 만족하는 자연수 x, y, z의 순서쌍 (x, y, z)의 개수를 구하여라. (단, $i=\sqrt{-1}$)

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 3 개

해설

$(xz+y)+(yz-x)i=10$

$xz+y=10 \cdots$ ㉠, $yz-x=0 \cdots$ ㉡

㉡을 ㉠에 대입

$y(z^2+1)=10$

z를 기준으로 하여 순서쌍을 구해보면

$(5,\ 5,\ 1),\ (4,\ 2,\ 2),\ (3,\ 1,\ 3)$ 3 개

7. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{2010}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$ 의 값은?

① -2 ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ $2i$

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=\dfrac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{-2i}{2}=-i$

$\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}=i$ 이므로

$f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2010}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2010}$

$=i^{2010}+(-i)^{2010}$

$=(i^4)^{502}\cdot i^2+\left\{(-i)^4\right\}^{502}\cdot(-i)^2$

$=-1+(-1)=-2$

8. $\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(3-x)^2}=x+3$은 서로 다른 두 실근을 갖는다. 이 두 실근을 α, β라 할 때, $3\alpha\beta$의 값은?

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

해설

(준식)$=|x-1|+|3-x|=x+3$

i) $x<1$

$-x+1+3-x=x+3,\ 3x=1$

$\therefore x=\dfrac{1}{3}$

ii) $1\le x<3$

$x-1+3-x=x+3,$

$x=-1$(해가 아니다)

iii) $x\ge 3$

$x-1-3+x=x+3x=7$

두 근이 $\dfrac{1}{3}$, 7

$\therefore 3\alpha\beta=7$

9. 방정식 $|x-3|+|x-4|=2$ 의 해의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

i) $x<3$ 일 때,
$-(x-3)-(x-4)=3,\ -2x=-5$
$\therefore\ x=\frac{5}{2}$
ii) $3\le x<4$ 일 때
$(x-3)-(x-4)=2,\ 0\cdot x=1$
∴ 해가 없다.
iii) $x\ge 4$ 일 때
$x-3+x-4=2,\ 2x=9$
$\therefore\ x=\frac{9}{2}$
따라서 $x=\frac{5}{2},\ \frac{9}{2}$ 이고 그 합은 7

10. 다음 방정식을 풀면?

$$(2-\sqrt{3})x^2+(1-\sqrt{3})x-1=0$$

① $x=-1$ 또는 $-\sqrt{3}$
② $x=-1$ 또는 $-2+\sqrt{3}$
③ $x=-1$ 또는 $2+\sqrt{3}$
④ $x=1$ 또는 $2-\sqrt{3}$
⑤ $x=1$ 또는 $=2+\sqrt{3}$

해설

주어진 식의 양변에 $2+\sqrt{3}$ 을 곱하면
$(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})x^2+(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$x^2-(1+\sqrt{3})x-(2+\sqrt{3})=0$
$(x+1)\left\{x-(2+\sqrt{3})\right\}=0$
$\therefore x=-1$ 또는 $x=2+\sqrt{3}$

11. 방정식 $x^2 - 2|x| - 3 = 0$의 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때
$x^2 - 2x - 3 = 0$, $(x+1)(x-3) = 0$
$x = -1$ 또는 $x = 3$
그런데 $x \geq 0$이므로 $x = 3$
ⅱ) $x < 0$일 때
$x^2 + 2x - 3 = 0$, $(x-1)(x+3) = 0$
$x = 1$ 또는 $x = -3$
그런데 $x < 0$이므로 $x = -3$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $x = 3$ 또는 $x = -3$
따라서 근의 합은 0이다.

12. 이차방정식 $x^2 - 4|x| - 5 = 0$의 두 근의 곱은?

① -5 ② -10 ③ -15 ④ -20 ⑤ -25

해설

ⅰ) $x \geq 0$일 때,
$x^2 - 4x - 5 = (x-5)(x+1) = 0$
$\therefore x = 5$
ⅱ) $x < 0$일 때,
$x^2 + 4x - 5 = (x+5)(x-1) = 0$
$\therefore x = -5$
ⅰ), ⅱ)에서 두 근의 곱은 -25이다.

13. 이차방정식 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 한 근이 1 일 때, 다른 한 근을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

1 이 $x^2 + mx + m - 1 = 0$ 의 근이므로
$x = 1$ 을 대입하면 $1 + m + m - 1 = 0 \quad \therefore m = 0$
주어진 방정식은 $x^2 - 1 = 0 \quad \therefore x = \pm 1$
따라서 다른 한 근은 $x = -1$

14. 이차방정식 $x^2+2x-a=0$의 해가 3 또는 b라 할 때, 상수 a, b의 합 $a+b$의 값은?

① 8　　② 10　　③ 12　　④ 14　　⑤ 16

해설

$x=3$이 $x^2+2x+a=0$의 근이므로
$3^2+2\cdot 3-A=0 \quad \therefore a=15$
$\therefore a=15$를 주어진 방정식에 대입하면
$x^2+2x-15=0,\ (x+5)(x-3)=0$
따라서 $x=-5$ 또는 $x=3$이므로 $b=-5$
$\therefore a+b=15+(-5)=10$

15. $x^2+ax+b=0$, $x^2+2bx+3a=0$를 동시에 만족하는 x는 -1밖에 없을 때, 상수 ab의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 12

해설

$x=-1$은 두 이차방정식 $x^2+ax=b=0$,
$x^2+2bx+3a=0$의 공통근이므로
$1-a+b=0,\ 1-2b+3a=0$
두 식을 연립하여 풀면
$a=-3,\ b=-4$
$\therefore ab=12$

16. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 에 대한 설명으로 다음 <보기> 중 옳은 것의 개수는? (단, $a,\ b,\ c,\ p,\ q$ 는 실수, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 판별식은 b^2-4ac 이다.

㉡ 두 근의 합은 $\frac{b}{a}$ 이다.

㉢ $a<0,\ c<0$ 이면 허근만 갖는다.

㉣ $a>0,\ c<0$ 이면 서로 다른 두 실근을 갖는다.

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다.

㉥ 한 근이 $p+qi$ 이면 다른 한 근은 $q-pi$ 이다.

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

㉠ 실계수 방정식에서만 판별식을 사용할 수 있다. 현재 a, b, c 가 실수이므로 판별식 사용 가능(참)

㉡ 두근의 합은 $-\frac{b}{a}$ 이다. (거짓)

㉢ b^2-4ac 에서 $ac>0$ 이다.
하지만 $b^2<4ac$ 인 경우만 허근을 가짐(거짓)

㉣ 판별식 b^2-4ac 에서 $ac<0$ 이므로 $b^2-4ac>0$ (참)

㉤ 두 근의 곱은 $\frac{c}{a}$ 이다. (참)

㉥ 실계수 방정식에서 한 근이 $p+qi$ 이면 $p-qi$ 가 또 다른 한 근이다.(거짓)

17. 방정식 $x^2-4x+y^2-8y+20=0$을 만족하는 실수 $x,\ y$에 대하여 $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=(x-2)^2+(y-4)^2=0$

$\therefore\ x=2,\ y=4$

$\therefore\ x+y=6$

해설

$x^2-4x+y^2-8y+20=0$이 실근을 가지므로

$D/4=4-(y^2-8y+20)\geq 0$

$y^2-8y+16\leq 0$

$(y-4)^2\leq 0,\ y=4$

준식에 대입하면 $x=2$

따라서 $x+y=6$

18. x에 대한 이차방정식 $x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 가질 때, 실수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$x^2+(2m+a+b)x+m^2+ab=0$
항상 중근을 가질 조건 : 판별식 $D=0$
$D=(2m+a+b)^2-4(m^2+ab)=0$
$4m^2+a^2+b^2+4ma+2ab+4mb-4m^2-4ab=0$
m에 관해 식을 정리하면
$(4a+4b)m+(a^2-2ab+b^2)=0$
$4a+4b=0,\quad a^2-2ab+b^2=0$
$\therefore a+b=0$

19. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

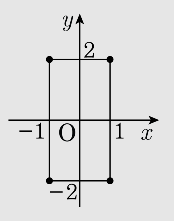
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\ \ |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

20. 자연수 n에 대해 $x = \left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^{2n}$ 라 하자. x가 될 수 있는 모든 수의 합을 구하면?

① $2i$ ② $-2i$ ③ 0 ④ 2 ⑤ -2

해설

$$x = \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1+i}\right)^2\right\}^n + \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{1-i}\right)^2\right\}^n$$

$$= \left(\frac{2}{2i}\right)^n + \left(\frac{2}{-2i}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{i}\right)^n + \left(-\frac{1}{i}\right)^n = (-i)^n + i^n$$

i^n 은 $n = 4k$, $n = 4k+1$, $n = 4k+2$, $n = 4k+3$ 인 경우에 따라 각각 달라지므로 (k 는 자연수)

(i) $n = 4k$ 이면 $x = 1+1 = 2$

(ii) $n = 4k+1$ 이면 $x = -i+i = 0$

(iii) $n = 4k+2$ 이면 $x = -1-1 = -2$

(iv) $n = 4k+3$ 이면 $x = i-i = 0$

$\therefore\ x = 2,\ 0,\ -2$

따라서, x가 될 수 있는 모든 수의 합은 0

21. 복소수들 사이의 연산 $*$가 다음과 같다고 하자.

$\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$

이 때, $(1+2i) * z = 1$을 만족시키는 복소수 z는?(단, $i = \sqrt{-1}$)

① $1+i$　　② $1-i$　　③ $-1+i$

④ $-1-i$　　⑤ i

해설

$z = a + bi$라 하면

$(1+2i) * z$

$= (1+2i) + (a+bi) + (1+2i)(a+bi)i$

$= (-a-b+1) + (a-b+2)i = 1$

$-a-b+1 = 1,\ a-b+2 = 0$

$a = -1,\ b = 1$

$\therefore\ z = -1+i$

22. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$ ② $-y$ ③ $2x$ ④ $\frac{-x}{2}$ ⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

23. $x^2 - x + 1 = 0$ 의 한 근을 z라 한다. $p = \dfrac{1+z}{3-z}$ 일 때, $7p \cdot \overline{p}$ 의 값을 구하면?

① 5　　② 4　　③ 3　　④ 2　　⑤ 1

해설

$x^2 - x + 1 = 0$ 의 근이 z, $\overline{z}$ 이므로

$z + \overline{z} = 1,\ z\overline{z} = 1$

$$\begin{aligned} 7p \cdot \overline{p} &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\overline{\frac{1+z}{3-z}}\right) \\ &= 7\left(\frac{1+z}{3-z}\right)\left(\frac{1+\overline{z}}{3-\overline{z}}\right) \\ &= 7\left\{\frac{1+(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}{9-3(z+\overline{z})+z\cdot\overline{z}}\right\} \\ &= 3 \end{aligned}$$

24. $\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 의 값을 구하면?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

$\alpha = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

$2\alpha = -1 + \sqrt{3}i$

$2\alpha + 1 = \sqrt{3}i$

양변을 제곱하여 정리하면

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= \alpha(\alpha^2 + \alpha + 1) + (\alpha^2 + \alpha + 1) + 4$

$= 4$

해설

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ 을 얻은 후 $\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$ 를 $\alpha^2 + \alpha + 1$ 로 나누면

$\alpha^3 + 2\alpha^2 + 2\alpha + 5$

$= (\alpha^2 + \alpha + 1)(\alpha + 1) + 4$

$= 4 \ (\because\ \alpha^2 + \alpha + 1 = 0)$

25. $a_1,\ a_2,\ \cdots a_{10}$ 은 1 또는 -1 의 값을 갖고 $a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 일 때, $\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\cdots\cdots\sqrt{a_{10}}$ 의 값이 될 수 있는 수를 다음<보기>에서 모두 고르면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

보기

㉠ 1　　㉡ -1　　㉢ i　　㉣ $-i$

① ㉠　　② ㉠, ㉡　　③ ㉡, ㉢

④ ㉠, ㉡, ㉢　　⑤ ㉠, ㉡, ㉢, ㉣

해설

$a_1a_2\ \cdots\cdots\ a_{10}=1$ 이면 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{10}$ 중에서 -1 이 되는 수는 짝수(0 포함) 개 있다.

i) -1 이 $4k+2(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k+2}=\sqrt{1}\cdot i^2=-1$

ii) -1 이 $4k(k=0,\ 1,\ 2)$ 개 있을 때

$\sqrt{a_1}\sqrt{a_2}\ \cdots\cdots\ \sqrt{a_{10}}$

$=\sqrt{a_1a_2\cdots a_{10}}\ i^{4k}$

$=1$

i), ii) 에서 ㉠, ㉡ 만이 옳다.

26. $a^2-3a+1=0$일 때, $a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}$의 값은?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$a^2-3a+1=0$에서

$a^2-2a+\dfrac{3}{a^2+1}=a-1+\dfrac{3}{3a}=a+\dfrac{1}{a}-1$

한편, $a^2-3a+1=0$의 양변을 a로 나누면

$a-3+\dfrac{1}{a}=0\quad\therefore\ a+\dfrac{1}{a}=3$

$\therefore$(준식)$=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)-1=2$

27. a, b, c가 삼각형의 세 변의 길이를 나타낼 때, $(a+b)x^2+2cx+a-b$는 x의 완전제곱식이다. 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 정삼각형
② $a=b$인 이등변삼각형
③ $b=c$인 이등변삼각형
④ a가 빗변인 직각삼각형
⑤ c가 빗변인 직각삼각형

해설

$a,\ b,\ c$가 삼각형의 세 변의 길이이므로
$a>0,\ b>0,\ c>0$
따라서, $a+b>0$이므로 준식은 이차식이다.
준식이 완전제곱식이 되려면
판별식 $D=0$
$\frac{D}{4}=c^2-(a+b)(a-b)=0$
정리하면, $c^2-a^2+b^2=0$
$\therefore\ a^2=b^2+c^2$
따라서, a가 빗변인 직각삼각형

28. 복소수 α,β 에 대하여 다음 보기 중 옳은 것을 모두 고르면? (단 $\overline{\alpha}$ 는 α 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

㉡ $\alpha+\beta i=0$ 이면 $\alpha=0$ 이고 $\beta=0$ 이다.

㉢ $\overline{\alpha}=\alpha$ 이면 α 는 실수이다.

㉣ $\overline{a}=\beta$ 이면 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

① ㉠,㉡,㉢ ② ㉠,㉢,㉣ ③ ㉡,㉢,㉣
④ ㉠,㉡,㉢,㉣ ⑤ ㉢,㉣

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha^2+\beta^2=0$
㉡ 반례 : $\alpha=1,\beta=i$ 일 때 $\alpha+\beta i=0$
㉢ $\overline{\alpha}=\alpha \to \alpha$ 는 실수(참)
㉣ $\alpha=a+bi,\ \overline{a}=\beta=a-bi(a,b$는 실수)
$\alpha+\beta=2a$(실수), $\alpha\beta=a^2+b^2$(실수) (참)

29. z이 복소수일 때, $z^2 = \bar{z}$ ($\bar{z}$는 z의 켤레복소수)가 되는 모든 z의 합은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$z = a + bi$이면

$z^2 = a^2 + 2abi - b^2 = a - bi = \bar{z}$

$a^2 - b^2 = a \cdots$①, $2ab = -b \cdots$②

②에서 $b = 0$또는 $a = -\frac{1}{2}$

i) $b = 0$일 때, ①에서 $a = 0, 1$

$\therefore\ z = 0$ 또는 1

ii) $a = -\frac{1}{2}$일 때, ①에서 $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 또는 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

i), ii)에 따라 모든 z의 합은 0

30. 세 방정식 $x^2+2ax+bc=0$, $x^2+2bx+ca=0$, $x^2+2cx+ab=0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은? (단, a, b, c는 실수)

① 세 방정식은 모두 실근을 갖는다.

② 세 방정식은 모두 허근을 갖는다.

③ 반드시 두 방정식만 실근을 갖는다.

④ 반드시 한 방정식만 실근을 갖는다.

⑤ 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

해설

세 방정식의 판별식을 각각

$\frac{D_1}{4}=a^2-bc$,

$\frac{D_2}{4}=b^2-ca$,

$\frac{D_3}{4}=c^2-ab$라 하면

$\frac{D_1}{4}+\frac{D_2}{4}+\frac{D_3}{4}$

$=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$

$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\geq 0$

따라서, $\frac{D_1}{4}$, $\frac{D_2}{4}$, $\frac{D_3}{4}$ 중 적어도 하나는 0보다 크거나 같다.

곧, 적어도 하나의 방정식은 실근을 갖는다.

31. $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α,β라 하고, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$라 할 때, $g(\alpha)\cdot g(\beta)$의 값은?

① 1　② 3　③ 8　④ 11　⑤ 13

해설

근과 계수와의 관계에서 $\alpha+\beta=3,\ \ \alpha\beta=1$

또, $g(x)=x^3-x^2-3x+3$

$=(x^2-3x+1)(x+2)+2x+1$

$\alpha,\ \beta$는 $x^2-3x+1=0$의 근이므로

$g(\alpha)=2\alpha+1,\ g(\beta)=2\beta+1$

$\therefore\ g(\alpha)g(\beta)=(2\alpha+1)(2\beta+1)$

$=4\alpha\beta+2(\alpha+\beta)+1$

$=4+6+1=11$

32. 실수를 계수로 갖는 이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이 허근 α를 갖고, α^3이 실수일 때, m의 값은?

① 0　　② 1　　③ 3
④ 0, 3　　⑤ 0, 1, 3

해설

α^3이 실수이므로 $\overline{\alpha}^3=\alpha^3$,
$(\alpha-\overline{\alpha})(\alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2)=0$
α는 허수이므로 $\alpha\neq\overline{\alpha}$
$\therefore\ \alpha^2+\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2=0\ \cdots\cdots$(ⅰ)
근과 계수와의 관계에서
$\alpha+\overline{\alpha}=m-1,\ \alpha\overline{\alpha}=m+1$
(ⅰ)은 $(\alpha+\overline{\alpha})^2-\alpha\overline{\alpha}=0,\ (m-1)^2-(m+1)=0$
$m^2-3m=m(m-3)=0$
$\therefore\ m=0,\ 3$
이차방정식 $x^2-(m-1)x+(m+1)=0$이
허근을 가지므로 $D=(m-1)^2-4(m+1)<0$
$m=0,\ 3$은 이 부등식을 만족시키므로 구하는 답이 된다.

33. 실수 x, y, z가 $x+y+z=6$, $xy+yz+zx=9$를 만족할 때 x의 최대값을 M, 최소값을 m이라 한다. 이 때 $M-m$의 값을 구하면 ?

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$y+z=6-x$,

$yz=9-x(y+z)=9-x(6-x)=(x-3)^2$

실수 y, z를 두 근으로 하는 이차방정식을 만들면

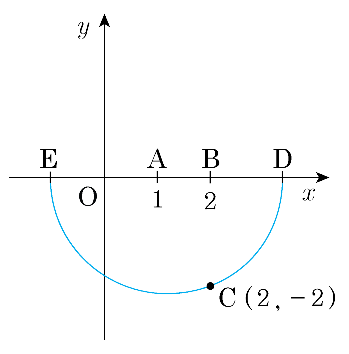
$t^2-(6-x)t+(x-3)^2=0$

$D=(6-x)^2-4(x-3)^2 \geq 0$에서 $x(x-4) \leq 0$

$\therefore\ 0 \leq x \leq 4$

$M=4,\ m=0 \quad \therefore\ M-m=4$

34. 다음의 그림에서 점 C, D, E는 점 A를 중심으로 하는 반원 위에 있다. 계수가 유리수인 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$의 그래프가 점 E를 지날 때, 반드시 지나는 또 다른 점을 구하면?



① A ② B ③ C

④ D ⑤ O

해설

$\overline{AC} = \sqrt{(2-1)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{5}$ 이므로

$\overline{AD} = \overline{AE} = \sqrt{5}$ 이다.

$\therefore$ 점 D 의 좌표는 $(1+\sqrt{5},\ 0)$,

점 E 의 좌표는 $(1-\sqrt{5},\ 0)$ 이다.

그런데, 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ $(a < 0)$ 의 그래프가 점 E를 지나므로

$x = 1 - \sqrt{5}$ 는 방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 의 근이다.

여기서, $a,\ b,\ c$ 가 유리수이므로 $x = 1 + \sqrt{5}$

($\because$ 켤레근) 또한 방정식의 근이 된다.

따라서, 그래프는 점 $D(1+\sqrt{5},\ 0)$ 을 지난다.

35. 사차방정식 $x^4 + 2ax^2 + a + 2 = 0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, 실수 a의 값의 범위는?

① $a < -2$　　② $-2 < a < -1$　　③ $-1 < a < 2$

④ $a > 2$　　⑤ $-1 < a < 0$

해설

$x^2 = t$로 놓으면

$t^2 + 2at + a + 2 = 0$이

서로 다른 양근을 가져야 하므로

(i) $\frac{D}{4} = a^2 - a - 2 > 0 \quad \therefore\ a < -1,\ 2 < a$

(ii) $\alpha + \beta = -2a > 0 \quad \therefore a < 0$

(iii) $\alpha\beta = a + 2 > 0 \quad \therefore\ a > -2$

$\therefore$ (i), (ii), (iii)에서 $-2 < a < -1$