1. $x^3 - 4x^2 + ax + b$를 $(x+1)^2$으로 나누면 나머지가 7이 될 때, $a+b$의 값은?

① -12 ② -10 ③ 0 ④ 10 ⑤ 12

해설

직접 나눠본다.

$$
\begin{array}{r|l}
x^2+2x+1 & x-6 \\
\hline
 & x^3-4x^2+ax+b \\
- & x^3+2x^2+x \\
\hline
 & -6x^2+(a-1)x+b \\
- & -6x^2-12x-6 \\
\hline
 & (a+11)x+b+6
\end{array}
$$

나머지가 7이므로 $a+11=0,\ b+6=7$

$\therefore\ a=-11,\ b=1$

$\therefore\ a+b=-10$

해설

$x^3 - 4x^2 + ax + b$

$= (x+1)^2(x+k) + 7$

$= x^3 + (k+2)x^2 + (2k+1)x + k + 7$

계수를 비교하면

$k+2=-4, 2k+1=a, k+7=b$

$k=-6$이므로 $a=-11, b=1$

$\therefore a+b=-10$

2. 다항식 x^3+ax+b가 다항식 x^2-x+1로 나누어 떨어지도록 상수 $a+b$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 1

해설

나누어 떨어지려면 나머지가 0이어야 하므로
$x^2=x-1$을 대입하면
$ax+(b-1)=0$
이 등식이 x에 대한 항등식이므로,
$a=0,\ b-1=0$
$\therefore\ a=0,\ b=1$
$\therefore a+b=1$

해설

x^3+ax+b
$=(x^2-x+1)Q(x)$
$=(x^2-x+1)(x+b)$
$\therefore\ b=1,\ a=0$

3. x의 다항식 x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때, 나머지가 $2x+1$이 되도록 상수 a, b의 값의 합을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2

해설

x^3+ax+b를 x^2-3x+2로 나눌 때,
몫을 $x+q$라 하면 (일반적으로 $px+q$로 해야겠지만 x^3의 계수가 1이므로 $x+q$)
$x^3+ax+b=(x^2-3x+2)(x+q)+2x+1$
$\therefore\ x^3+ax+b=(x-2)(x-1)(x+q)+2x+1$
이 등식은 x에 관한 항등식이므로
$x=1$을 대입하면 $1+a+b=2+1\cdots$㉠
$x=2$를 대입하면 $8+2a+b=4+1\cdots$㉡
㉠, ㉡에서 $a=-5$, $b=7$
$\therefore\ a+b=2$

4. $x+\dfrac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\dfrac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1 ② −1 ③ −2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$x+\dfrac{1}{x}=1$ 에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$(\text{준 식})=(x^3)^{33}\cdot x^2+\dfrac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}$

$=-x^2+\dfrac{-1}{x^2}=-\dfrac{x^4+1}{x^2}=-\dfrac{-x+1}{x^2}$

$=\dfrac{x-1}{x^2}=1$

5. $x+y=2$, $x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy=-1$　② $x^2+y^2=6$　③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$　⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

6. $x-\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^5+\frac{1}{x^5}$ 의 값은 ?

① $\pm 6\sqrt{5}$ ② $\pm 5\sqrt{5}$ ③ $\pm 3\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{5}$ ⑤ $\pm\sqrt{5}$

해설

$x^5+\frac{1}{x^5}=\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ 에서

$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2=3$ 에서

$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+\frac{1}{x^2}+2=5$

$\therefore\ x+\frac{1}{x}=\pm\sqrt{5}$

$x^3+\frac{1}{x^3}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)$

$=\pm 5\sqrt{5}-3(\pm\sqrt{5})=\pm 2\sqrt{5}$

$\therefore\ x^5+\frac{1}{x^5}=3(\pm 2\sqrt{5})-(\pm\sqrt{5})=\pm 5\sqrt{5}$

7. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 는 각각 α, β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

㉠ $\alpha = \overline{\beta}$ 이면, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ 는 모두 실수이다.
㉡ $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.
㉢ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.
㉣ $\alpha + \beta i = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이고 $\beta = 0$ 이다.

① ㉡,㉢ ② ㉠,㉡,㉢ ③ ㉠,㉡,㉣
④ ㉠,㉡ ⑤ ㉠,㉡,㉢,㉣

해설

$\alpha = a + bi$, $\beta = a - bi$ (a, b 는 실수)
㉠ $\alpha + \beta = 2a$, $\alpha\beta = a^2 + b^2$
㉡ $\alpha\beta = 0$, $a^2 + b^2 = 0$, $a = 0, b = 0$
㉢ (반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$
㉣ (반례) $\alpha = 1$, $\beta = i$

8. α, β 가 복소수일 때, <보기> 중 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이다.)

㉠ $\alpha^2+\beta^2=0$ 이면 $\alpha=0$, $\beta=0$ 이다.
㉡ $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 또는 $\beta=0$ 이다.
㉢ $\alpha=\overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta=0$ 이면 $\alpha=0$ 이다.

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉠, ㉡
④ ㉡, ㉢ ⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

㉠ 반례 : $\alpha=1$, $\beta=i$
㉡ (생략)
㉢ $\alpha=x+yi$ 라 하면
$\alpha\beta=(x+yi)(x-yi)=x^2+y^2(x,y$는실수$)$
$x^2+y^2=0$ 이려면 $x=0, y=0$
즉, $\alpha=0$

9. 다음 보기 중 옳은 것의 개수는? (단, $i = \sqrt{-1}$)

㉠ 16의 제곱근은 4이다.

㉡ 실수를 제곱하면 양수 또는 0이다.

㉢ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z + \bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수)

㉣ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z\bar{z}$는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

㉤ 복소수 $z = a + bi$ (a, b는 실수)에 대하여 $z = \bar{z}$이면 z는 실수이다. (단, $\bar{z}$는 z의 켤레복소수이다.)

① 1개 ② 2개 ③ 3개 ④ 4개 ⑤ 5개

해설

㉠ 제곱해서 16 이 되는 수 $4, -4$ $\therefore$ 거짓
㉡ 실수는 제곱하면 0보다 크거나 같다. $\therefore$ 참
㉢ $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$, $z + \bar{z} = 2a$ $\therefore$ 참
㉣ $z\bar{z} = a^2 + b^2$ $\therefore$ 참
㉤ $z = \bar{z}$, $a + bi = a - bi$, $2bi = 0$, $b = 0$ $\therefore$ $z = a = \bar{z}$ $\therefore$ 참

10. a, b 가 실수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면?

Ⅰ n이 양의 홀수일 때, $\sqrt[n]{-3^n}$은 실수이다.
Ⅱ $-1 < a < 1$일 때, $\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} = 3$
Ⅲ $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$이다.
Ⅳ $0 < a < b$일 때, $\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

① Ⅰ, Ⅱ ② Ⅰ, Ⅲ ③ Ⅱ, Ⅲ
④ Ⅰ, Ⅳ ⑤ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $\sqrt[n]{-3^n} = -\sqrt[n]{3^n} = -3 \in R$ (참)

Ⅱ. $\begin{aligned}\sqrt{(a+1)^2} - \sqrt{(a-2)^2} &= |a+1| - |a-2| \\ &= a+1-(2-a) \\ &= 2a-1 \neq 3\end{aligned}$

Ⅲ. $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = -\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ 이면 $b < 0$, $a \geq 0$ 이다.

$\begin{aligned}\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} &= \sqrt{a}\cdot\sqrt{-(-b)} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{(-b)i} \\ &= \sqrt{a(-b)i} = \sqrt{-a(-b)} = \sqrt{ab}\end{aligned}$

$\therefore \sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ (참)

Ⅳ. $0 < a < b$ 이면 $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ 이다.

$\sqrt{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = |\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{b} - \sqrt{a}$

11. α, β 의 켤레복소수를 $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$ 라고 할 때, 다음 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

보기

ㄱ. $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}i$

ㄴ. $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1$

ㄷ. $\alpha\overline{\alpha}^2+\alpha^2\overline{\alpha}$ 는 실수이다.

ㄹ. $\alpha\overline{\beta}=1$ 일 때, $\dfrac{\alpha}{\overline{\alpha}}+\dfrac{\overline{\beta}}{\beta}$ 는 실수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ

④ ㄷ, ㄹ ⑤ ㄱ, ㄷ, ㄹ

해설

$\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, $\overline{\alpha}=a-bi$, $\overline{\beta}=c-di$ 라 하면

ㄱ $\overline{\alpha-\beta i}=\overline{a+bi-(c+di)i}$

$=\overline{a+bi-ci-di^2}$

$=a+d-(b-c)i$

$\overline{\alpha}-\overline{\beta}i=(a-bi)-(c-di)i$

$=a-bi-ci+di^2$

$=a-d-(b+c)i$이므로 ㄱ은 거짓

ㄴ $\overline{\alpha+\beta-1}=\overline{a+bi+c+di-1}$

$=\overline{(a+c-1)+(b+d)i}$

$=(a+c-1)-(b+d)i$

$\overline{\alpha}+\overline{\beta}+1=a-bi+c-di+1$

$=(a+c+1)-(b+d)i$이므로

ㄴ은 거짓

12. α, β 가 복소수일 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, $\overline{\beta}$ 는 β 의 켤레복소수이고 $i = \sqrt{-1}$)

보기

ㄱ. $\alpha = \overline{\beta}$ 이면 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ 는 모두 실수이다.

ㄴ. $\alpha = \overline{\beta}$ 일 때, $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha = 0$ 이다.

ㄷ. $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ 이면 $\alpha = 0, \beta = 0$ 이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄴ, ㄷ

④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

해설

$\alpha = a + bi \Rightarrow \overline{\beta} = a + bi$

ㄱ $\alpha + \beta = (a + bi) + (a - bi) = 2a$ 는 실수 (T), $\alpha\beta = a^2 + b^2 =$ 실수

ㄴ $\alpha\beta = a^2 + b^2 = 0 \Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \alpha = 0$ (T)

ㄷ 반례 : $\alpha = 1, \beta = i$ 일 때, $\alpha^2 + \beta^2 = 0$

13. $x=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, x^7+x^4+2 의 값은?

① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$$x^2=\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1+2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$$
$$=\frac{-2+2\sqrt{3}i}{4}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$x^3=x\cdot x^2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$
$$=\frac{-1+3i^2}{4}=-1$$
$$\therefore\ x^7+x^4+2=(x^3)^2\cdot x+x^3\cdot x+2=x-x+2=2$$

14. $w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, $1+w+w^2+\cdots+w^{100}$ 의 값은?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 0

④ $\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$

해설

$w = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에서

$w^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2 = \dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}$

$= \dfrac{-2-2\sqrt{3}i}{4} = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$w^3 = w\cdot w^2 = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\dfrac{-1-\sqrt{3}}{2} = \dfrac{1-3i^2}{4} = 1$

$1+w+w^2 = 1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}+\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2} = 0$ 이므로

$\therefore 1+w+w^2+w^3+w^4+\cdots+w^{100}$

$= 1+w+w^2+w^3(1+w+w^2)+\cdots$

$+w^{96}(1+w+w^2)+w^{99}(1+w)$

$= 0+0+\cdots+0+w^{99}(1+w) = (w^3)^{33}\cdot(1+w)$

$= 1+w = 1+\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

15. $x = 3 + 2i$ 일 때, $x^2 - 6x - 10$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : -23

해설

$x = 3 + 2i$ 에서 $x - 3 = 2i$ 의 양변을 제곱하면

$(x-3)^2 = (2i)^2$ $\therefore\ x^2 - 6x = -13$

$x^2 - 6x - 10 = -13 - 10 = -23$

$\therefore\ -23$

16. $x = -2 + i$ 일때, $x^3 + 4x^2 - 3x + 2$ 의 값은?

① $-15 + 5i$　② $-12 + 2i$　③ $14 - 4i$

④ $16 - 6i$　⑤ $18 - 8i$

해설

$x = -2 + i$ 에서 $x + 2 = i$ 의 양변을 제곱하면
$x^2 + 4x + 5 = 0$ 즉$x^2 + 4x = -5$ 이므로
$x^3 + 4x^2 - 3x + 2$
$= x(x^2 + 4x) - 3x + 2$
$= -5x - 3x + 2$
$= -8x + 2$
$= -8(-2 + i) + 2$
$= 18 - 8i$

17. $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{10}+\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{8}$ 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ ③ 1

④ 0 ⑤ -1

해설

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $2\omega+1=\sqrt{3}i$

양변을 제곱해서 정리하면 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0\Rightarrow\omega^3=1$

$(\omega^3)^3\cdot\omega+(\omega^3)^2\cdot\omega^2=\omega+\omega^2=-1$

18. $x+\frac{1}{x}=1$ 일 때, $x^3+5x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{1}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ② $\frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)$ ③ $\frac{5}{2}(2\pm\sqrt{3}i)$
④ $\frac{7}{2}(3\pm\sqrt{3}i)$ ⑤ $\frac{9}{2}(4\pm\sqrt{3}i)$

해설

$$x+\frac{1}{x}=1 \Rightarrow x^2-x+1=0 \therefore x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= x^3+\frac{1}{x^3}+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= \left(x+\frac{1}{x}\right)^3-\left(x+\frac{1}{x}\right)+3x \\ &= 3x \\ &= \frac{3}{2}(1\pm\sqrt{3}i)\end{aligned}$$