1. 이차방정식 $x^2-x(kx-5)+3=0$이 허근을 가질 때, 정수 k의 최댓값을 구하면?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$x^2-kx^2+5x+3=0$이 허근은 가지려면

$D=25-4\times 3(1-k)<0$

$25-12+12k<0 \quad \therefore 12k<-13$

$\therefore k<-\dfrac{13}{12}$이므로

정수 k의 최댓값은 -2

2. 이차방정식 $x^2+4x+k=0$이 허근을 가지도록 상수 k의 값의 범위를 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $k>4$

해설

$\frac{D}{4}=2^2-k<0$

$\therefore\ k>4$

3. 이차방정식 $x^2 - x(kx-7)+3=0$이 허근을 갖기 위한 최대 정수 k 값은?

① -8　② -4　③ -2　④ 5　⑤ 2

해설

$x^2 - x(kx-7)+3=0$

$x^2 - kx^2 + 7x + 3 = 0$

$(1-k)x^2 + 7x + 3 = 0$

(ⅰ) 주어진 방정식이 이차방정식이므로

x^2의 계수는 $1-k \neq 0$ 이어야 한다.

따라서 $k \neq 1$

(ⅱ) 주어진 이차방정식이

허근을 갖기 위해서는

판별식 $D<0$이어야 하므로

$D = 7^2 - 4\cdot(1-k)\cdot 3 = 49 - 12 + 12k < 0$

$37 + 12k < 0$

$\therefore k < -\frac{37}{12}$

따라서 최대정수는 -4이다.

4. 이차방정식 $x^2 - 2x + m = 0$이 허근을 가질 때, 실수 m의 범위를 구하면?

① $m < 1$
② $-1 < m < 1$
③ $m < -1$ 또는 $m > 1$
④ $m > 1$
⑤ $m > -1$

해설

주어진 이차방정식이 허근을 가지려면

$D/4 = 1 - m < 0$

$\therefore m > 1$

5. 이차방정식 $5x^2-6x+a-5=0$이 서로 다른 두 허근을 가질 때 정수 a의 최솟값은?

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

해설

$D'=9-5(a-5)=-5a+34<0$

$\therefore a>\frac{34}{5}$

6. 이차방정식 $2x^2-4x-3k=0$이 허근을 갖고, 동시에 $x^2+5x-2k=0$이 실근을 갖도록 하는 정수 k의 개수를 구하면?

① 1개　② 2개　③ 3개　④ 4개　⑤ 5개

해설

$2x^2-4x-3k=0$이 허근을 가질 조건은

$\frac{D}{4}=4+6k<0$

$\therefore\ k<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots$ ㉠

$x^2+5x-2k=0$이 실근을 가질 조건은

$D=25+8k\ge 0$

$\therefore\ k\ge -\frac{25}{8}\ \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $-\frac{25}{8}\le k<-\frac{2}{3}$

따라서, 정수 $k=-3,\ -2,\ -1$

$\therefore$ 정수 k의 개수는 3개

7. a가 실수일 때, $f(x) = x^2 + 2(a+1)x + a^2$, $g(x) = x^2 + 2ax + (a-1)^2$ 에 대하여 x에 대한 두 이차방정식 $f(x) = 0, g(x) = 0$의 근에 대한 다음 설명 중 옳은 것은?

① $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$도 실근을 가진다.

② $f(x) = 0$이 실근을 가지면 $g(x) = 0$은 허근을 가진다.

③ $f(x) = 0$이 허근을 가지면 $g(x) = 0$도 허근을 가진다.

④ $g(x) = 0$이 실근을 가지면 $f(x) = 0$은 허근을 가진다.

⑤ $g(x) = 0$이 허근을 가지면 $f(x) = 0$은 실근을 가진다.

해설

방정식 $f(x) = 0$과 $g(x) = 0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 하면

$\frac{D_1}{4} = (a+1)^2 - a^2 = 2a+1$,

$\frac{D_2}{4} = a^2 - (a-1)^2 = 2a-1$

모든 실수 a에 대하여

$2a + 1 > 2a - 1$,

즉, $D_1 > D_2$이므로 $D_1 < 0$이면 $D_2 < 0$

8. 이차방정식 $x^2 - ax + b = 0$ $(ab \neq 0)$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $\alpha + \beta = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^3 + \beta^3$이 성립한다. 이 때, $a,\ b$의 값은?

① $a = 1,\ b = 1$　② $a = 1,\ b = 2$　③ $a = -1,\ b = 2$
④ $a = 2,\ b = 1$　⑤ $a = 2,\ b = 2$

해설

$\alpha + \beta = a,\ \alpha\beta = b$
$\alpha + \beta = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta)$
$a = a^2 - 2b = a^3 - 3ab$
$a(a^2 - 3b) = a$
$\therefore a^2 - 3b = 1$
$a^2 - 2b = a$이므로 $a - b = 1$
$(b + 1)^2 - 3b = 1$
$b^2 - b = b(b - 1) = 0$
$ab \neq 0$이므로 $b = 1$
$\therefore a = 2, b = 1$

9. $A = \left\{x | x^2 + ax + b = 0\right\} = \{1, \alpha\}$,
$B = \left\{x | x^2 + bx + a = 0\right\} = \{-3, \beta\}$ 일 때,
α^2, β^2 을 두 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 곱을 구하면?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

(i) A 에서 $x^2 + ax + b = 0$ 의 두 근이 $1,\ \alpha$
$\therefore\ 1 + \alpha = -a,\ 1 \cdot \alpha = b$ $\cdots\cdots$ ㉠
B 에서 $x^2 + bx + a = 0$ 의 두 근이 $-3,\ \beta$
$\therefore\ -3 + \beta = -b,\ -3\beta = a$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $a,\ b$를 소거하면
$1 + \alpha = 3\beta,\ \alpha = 3 - \beta$ $\quad \therefore\ \alpha = 2,\ \beta = 1$
(ii) $\alpha^2 = 4,\ \beta^2 = 1$
$x^2 - (\alpha^2 + \beta^2)x + \alpha^2\beta^2 = 0$
$\therefore\ x^2 - 5x + 4 = 0$
$\therefore$ 두 근의 곱은 4

10. 이차방정식 $x^2 + 2(m-1)x - 2m - 6 = 0$의 근 중 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 클 때 실수 m의 범위는 ?

① $m < 1$

② $-3 < m < 1$

③ $m < -3$ 또는 $m > 1$

④ $m > -3$

⑤ $m < -1$

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha + \beta > 0,\ \alpha\beta < 0$

($\because$ 양근의 절대값이 음근의 절대값보다 크다.)

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -2(m-1) > 0 & \therefore\ m < 1 \\ \alpha\beta = -2m - 6 < 0 & \therefore\ m > -3 \end{cases}$$

$\therefore\ -3 < m < 1$

11. 이차방정식 $x^2-10x+k=0$의 두 근의 비가 $2:3$이 되도록 상수 k의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답 : 24

해설

주어진 방정식의 한 근을 2α라 하면
다른 한 근은 3α가 되므로

$$\begin{cases} 2\alpha+3\alpha=10 & \cdots\cdots ① \\ 2\alpha\times3\alpha=k & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①, ②를 풀면
$\alpha=2,\ k=6\times2^2=24$

12. x에 대한 이차방정식 $x^2-2ax+4b+2=0$의 두 근의 차가 2가 되도록 하는 실수 a, b에 대하여 b의 최솟값을 구하면?

① $-\frac{1}{4}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{1}{3}$ ④ $-\frac{3}{4}$ ⑤ $-\frac{3}{2}$

해설

두 근의 차가 2이므로

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4$

$(2a)^2-4(4b+2)=4$

$\therefore\ a^2-(4b+2)=1,\quad b=\frac{1}{4}a^2-\frac{3}{4}$

$\therefore$ b의 최솟값은 $-\frac{3}{4}$

13. 방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$ 의 모든 근의 합이 0 일 때 상수 a 의 값은?

① 4 ② 2 ③ 0 ④ −2 ⑤ −6

해설

$|x^2+(a-2)x-2|=1$

ⅰ) $x^2+(a-2)x-2=1$ 일 때

$x^2+(a-2)x-3=0$ 에서

두근의 합은 $-(a-2)$ ⋯ ㉠

ⅱ) $x^2+(a-2)x-2=-1$ 일 때

$x^2+(a-2)x-1=0$ 에서

두근의 합은 $-(a-2)$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 모든 근의 합은

$-(a-2)-(a-2)=0$ $\therefore$ $a=2$

14. 이차방정식 $f(x)=0$의 두근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=6$이 성립한다. 이 때, 방정식 $f(5x-7)=0$의 두 근의 합은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)=0,\ \ (a\neq 0)$에서
$f(5x-7)=a(5x-7-\alpha)(5x-7-\beta)=0$
$\therefore\ 5x=7+\alpha,\ 5x=7+\beta$
$x=\dfrac{7+\alpha}{5},\ \dfrac{7+\beta}{5}$
따라서, 구하는 두 근의 합은
$\dfrac{14+\alpha+\beta}{5}=\dfrac{20}{5}=4$

15. 이차방정식 $f(x) = 0$의 두 근 α, β에 대하여 $\alpha + \beta = 2$, $\alpha\beta = 4$일 때, 이차방정식 $f(2x-2) = 0$의 두 근의 곱은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$f(x) = x^2 - 2x + 4$

$f(2x-2) = 4(x-1)^2 - 4(x-1) + 4 = 0$

$(x-1)^2 - (x-1) + 1 = x^2 - 3x + 3 = 0$

따라서 두 근의 곱은 3이다.

16. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식이 $x^2+ax+b=0$이다. $a+b$의 값을 구하면?

① 2 ② 1 ③ -1 ④ -2 ⑤ -3

해설

이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근이 α, β이므로,
근과 계수와의 관계에 의해서
$\alpha+\beta=3$, $\alpha\beta=1$이다.

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$

$$=(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=3+\frac{3}{1}=6$$

$$\left(\alpha+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+1+1+\frac{1}{\alpha\beta}=1+2+1=4$$

$\therefore \alpha+\frac{1}{\beta}$, $\beta+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 가지는 x의 이차방정식은

$x^2-6x+4=0$

$\therefore\ a=-6,\ b=4$

$\therefore\ a+b=-2$

17. 이차방정식 $x^2-x+5=0$의 두근을 α, β라 할때, $\alpha+1$과 $\beta+1$을 두근으로 하는 이차방정식을 구하면? (단, 최고차항의 계수는 1이다.)

① $x^2+3x-7=0$
② $x^2-3x-7=0$
③ $x^2+7x-3=0$
④ $x^2-7x+3=0$
⑤ $x^2-3x+7=0$

해설

$\alpha+\beta=1,\ \alpha\beta=5$

두근의 합 : $(\alpha+1)+(\beta+1)=(\alpha+\beta)+2=3$

두근의 곱 : $(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+(\alpha+\beta)+1$

$=5+1+1=7$

$\therefore\ x^2-3x+7=0$

18. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근이 α, β일 때, $\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 하는 이차방정식은?

① $x^2-3x+2=0$
② $x^2+4x+6=0$
③ $x^2+3x-4=0$
④ $x^2-4x+6=0$
⑤ $x^2+2x-3=0$

해설

근과 계수와의 관계에 의해
$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$
$(\alpha+1)+(\beta+1)=4,$
$(\alpha+1)(\beta+1)=\alpha\beta+\alpha+\beta+1=6$
$\therefore\ \alpha+1,\ \beta+1$을 근으로 하는 방정식은
$x^2-4x+6=0$

19. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 2 , 곱이 3일 때, 이차방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 하면

$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$이고 조건에서

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=3$

$f(2x+1)=0$에서

$2x+1=\alpha$ 또는 $2x+1=\beta$

$\therefore x=\frac{\alpha-1}{2}$ 또는 $x=\frac{\beta-1}{2}$

따라서 $f(2x+1)=0$ 의 근은 $\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$

이때 두 근의 합 $\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}$

$=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{2-2}{2}=0$

20. 이차방정식 $x^2-2ax+4=0$의 두 근이 모두 1보다 크다. 이 때, 실수 a의 값의 범위를 정하면?

① $2 \le a < \frac{5}{2}$　② $2 \le a \le \frac{5}{2}$　③ $2 < a < \frac{5}{2}$
④ $2 \le a < 3$　⑤ $2 < a < 3$

해설

$f(x)=x^2-2ax+4$라고 하면

(i) $f(1)>0 \Rightarrow a < \frac{5}{2}$

(ii) 두근을 가지므로

$\frac{D}{4}=a^2-4 \ge 0$

$a \le -2$ 또는 $a \ge 2$

(iii) 그래프의 축이 $x=1$의 오른쪽에 있어야하므로

$a > 1$

(i), (ii), (iii)에 의해 $2 \le a < \frac{5}{2}$

21. 이차방정식 $x^2-2x+a+1=0$의 두 근이 서로 다른 부호의 실근을 가질 때, a의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $a<-1$

해설

(두 근의 곱)$=a+1<0$ $\quad\therefore a<-1$

22. 이차방정식 $x^2+x+4(k-2)=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 k의 값의 범위는?

① $-2<k\le -1$　　② $-1<k\le \frac{33}{16}$　　③ $2<k\le \frac{33}{16}$
④ $k\le \frac{16}{33}$　　⑤ $k<\frac{21}{16}$

해설

두 근을 α, β라고 할 때,
모두 음수일 조건은
$\alpha+\beta<0$, $\alpha\beta>0$, $D\ge 0$
(ⅰ) $\alpha+\beta=-1<0$
(ⅱ) $\alpha\beta=4(k-2)>0 \quad \therefore k>2$
(ⅲ) $D=1^2-4\cdot 4(k-2)=33-16k\ge 0$
$\therefore k\le \frac{33}{16}$
(ⅱ)과 (ⅲ)의 공통 범위는 $2<k\le \frac{33}{16}$

23. x에 관한 이차방정식 $x^2-2(k-3)x+(k+3)=0$의 두 근이 모두 음수일 때, 정수 k의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

(ⅰ) 두 근이 실수이므로 $\frac{D}{4} \geq 0$

$\frac{D}{4} = (k-3)^2 - 1 \cdot (k+3) \geq 0$

$k^2 - 7k + 6 \geq 0$, $(k-1)(k-6) \geq 0$

$\therefore k \leq 1,\ k \geq 6$

(ⅱ) 두 근의 합은 음수, 곱은 양수

$2(k-3) < 0$, $k+3 > 0$

$\therefore -3 < k < 3$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-3 < k \leq 1$

$\therefore$ 정수 k의 최댓값은 1

24. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 k의 범위를 정하면?

① $-2 \le k \le 3$　② $2 \le k \le 5$　③ $1 \le k \le 2$
④ $k \ge 3$　⑤ $k \le -1$

해설

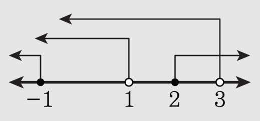
$x^2+2(k-1)x+3-k=0$

(i) $\dfrac{D}{4}=(k-1)^2-(3-k) \ge 0$

$(k-2)(k+1) \ge 0 \quad \therefore k \ge 2$ 또는 $k \le -1$

(ii) 두 근의 합, 곱 모두 양수

$-2(k-1)>0,\ 3-k>0 \quad \therefore k<1$



$\therefore \quad k \le -1$

25. 이차방정식 $-x^2+4x+a=0$의 두 근이 모두 양수이기 위한 a의 최대정수를 m, 이차방정식 $x^2+2(x+1)+k^2-9=0$의 두 근이 서로 다른 부호이기 위한 k의 최소 정수를 n이라 할 때, $m+n$의 값은?

① -8　　② -7　　③ -3　　④ -1　　⑤ 3

해설

(ⅰ) $-x^2+4x+a=0$의 두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=-a>0$에서 $a<0$

$\frac{D}{4}=4+a\ge 0$에서 $a\ge -4$

$\therefore\ -4\le a<0$

최대정수 $m=-1$

(ⅱ) $x^2+2x+k^2-7=0$

두 근의 곱 $k^2-7<0$

$\therefore\ -\sqrt{7}<k<\sqrt{7}$

최소의 정수 $n=-2$

$\therefore\ m+n=-3$

26. 다음의 이차방정식에 대한 설명 중 틀린 것은? (단, a, b, c는 실수이다.)

① 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$이다.

② 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β, $D=b^2-4ac$라고 하면 $(\alpha-\beta)^2=\frac{D}{a^2}$ 이다.

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ab<0$이다.

④ 이차방정식 $x^2+ax+b=0$이 서로 다른 두 실근을 가지면, $x^2+(a-2c)x+b-ac$도 서로 다른 두 실근을 갖는다.

⑤ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 두 근을 α, β라 하면 $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$, $\alpha\beta=\frac{c}{a}$(단, $a\neq 0$)

해설

③ 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$이 서로 다른 부호의 두 실근을 가지기 위한 필요충분 조건은 $ac<0$이다.

27. x에 대한 이차방정식 $x^2-2kx+2k+3=0$에 두 근이 모두 음수가 되게 하는 실수 k의 값의 범위를 정하면 ?

① $k \geq 3$ ② $-\frac{3}{2} < k \leq -1$ ③ $k < -\frac{3}{2}$
④ $\frac{3}{2} < k \leq 2$ ⑤ $k < \frac{3}{2}$

해설

두 근이 모두 음수이면
① $D/4 \geq 0$에서 $k \leq -1, k \geq 3$
② 두 근의 합 $2k < 0$, $k < 0$
③ 두 근의 곱 $k > -\frac{3}{2}$
따라서 $-\frac{3}{2} < k \leq -1$

28. 다음 x의 이차방정식의 두 실근의 절댓값이 같고, 부호가 다르게 실수 m의 값을 정하면?

$$3(x-1)(x-m)-x(7-m^2)=18-m^2$$

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 근의 절댓값이 같고 부호가 다를 조건은
$\alpha+\beta=0,\ \alpha\beta<0$
준식을 x에 관해서 정리하면,
$3x^2+(m^2-3m-10)x+m^2+3m-18=0$
따라서, $\alpha+\beta=\dfrac{-(m^2-3m-10)}{3}=0,$
즉 $m^2-3m-10=0$
$(m-5)(m+2)=0 \quad \therefore\ m=5,\ -2 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$\alpha\beta=\dfrac{m^2+3m-18}{3}<0,\ m^2+3m-18<0$
$(m-3)(m+6)<0 \quad \therefore\ -6<m<3 \quad \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통범위에 의해 $m=-2$