

1. x 에 대한 이차방정식 $(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이 허근을 가질 때, $k > m$ 이다. m 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2 - 1)x^2 - 2(k - 1)x + 1 = 0$ 이

허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = (k - 1)^2 - (k^2 - 1) < 0$$

$$(k^2 - 2k + 1) - (k^2 - 1) < 0$$

$$-2k + 2 < 0, k > 1$$

$$\therefore m = 1$$

2. x 에 대한 이차방정식 $(2m+3)x^2-2mx+1=0$ 이 허근을 갖도록 하는 실수 m 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < m < 3$

해설

주어진 방정식이 이차일 조건 : $m \neq -\frac{3}{2}$

이차식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$$\frac{D}{4} = (-m)^2 - (2m+3) < 0$$

$$m^2 - 2m - 3 < 0$$

$$(m-3)(m+1) < 0$$

$$\therefore -1 < m < 3$$

3. 이차방정식 $x^2 + 8x + 2k = 0$ 이 허근을 가지도록 하는 정수 k 의 값의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$$\frac{D'}{4} < 0 \text{ 이어야 하므로,}$$

$$16 - 2k < 0, \quad 2k > 16, \quad \therefore k > 8$$

$\therefore$ 정수 k 의 최솟값은 9

4. x 에 관한 두 이차방정식 $x^2 + 4kx - 12k = 0$, $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$ 이 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k < 2$

해설

$$x^2 + 4kx - 12k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2kx + k + 2 = 0 \cdots \textcircled{2} \text{이라 하면,}$$

$\textcircled{1}$ 의 판별식:

$$\frac{D'}{4} = (2k)^2 + (12k) = 4k^2 + 12k = 4k(k + 3)$$

$\textcircled{2}$ 의 판별식:

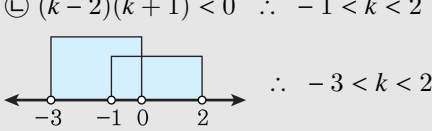
$$\frac{D'}{4} = (-k)^2 - (k + 2) = k^2 - k - 2 = (k - 2)(k + 1)$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 식이 허근을 갖기 위해서는

$\frac{D'}{4} < 0$ 을 만족해야 한다. 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 경우이므로, 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 k 의 범위를 구하면 된다.

$$\textcircled{1} \quad 4k(k + 3) < 0 \quad \therefore -3 < k < 0$$

$$\textcircled{2} \quad (k - 2)(k + 1) < 0 \quad \therefore -1 < k < 2$$



5. x 에 관한 두 이차방정식 $x^2 + 4kx - 12k = 0$, $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$ 이 동시에 허근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < k < 0$

해설

$$x^2 + 4kx - 12k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2kx + k + 2 = 0 \cdots \textcircled{2} \text{이라 하면,}$$

$\textcircled{1}$ 의 판별식:

$$\frac{D'}{4} = (2k)^2 + (12k) = 4k^2 + 12k = 4k(k+3)$$

$\textcircled{2}$ 의 판별식:

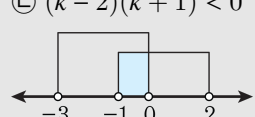
$$\frac{D'}{4} = (-k)^2 - (k+2) = k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$$

$\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ 식이 허근을 갖기 위해서는,

$$\frac{D'}{4} < 0 \text{을 만족해야 한다.}$$

$$\textcircled{1} \quad 4k(k+3) < 0 \quad \therefore -3 < k < 0$$

$$\textcircled{2} \quad (k-2)(k+1) < 0 \quad \therefore -1 < k < 2$$



두 부등식의 공통부분은 $\therefore -1 < k < 0$

6. x 에 관한 두 이차방정식 $x^2 + 4kx - 12k = 0$, $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$ 이 하나는 허근, 하나는 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k \leq -1$, $0 \leq k < 2$

해설

$$x^2 + 4kx - 12k = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 - 2kx + k + 2 = 0 \cdots \textcircled{2} \text{이라 하면,}$$

$\textcircled{1}$ 의 판별식:

$$\frac{D'}{4} = (2k)^2 + (12k) = 4k^2 + 12k = 4k(k+3)$$

$\textcircled{2}$ 의 판별식:

$$\frac{D'}{4} = (-k)^2 - (k+2) = k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$$

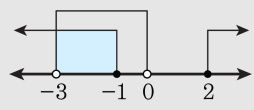
$\textcircled{1}$ 식이 허근, $\textcircled{2}$ 식이 실근을 가질 경우

(i)와 $\textcircled{1}$ 식이 실근,

$\textcircled{2}$ 식이 허근을 가질 경우 (ii)가 존재한다.

$$(i) \textcircled{1} 4k(k+3) < 0, \therefore -3 < k < 0$$

$$\textcircled{2} (k-2)(k+1) \geq 0, \therefore k \leq -1, k \geq 2$$

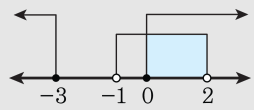


두 부등식의 공통부분은

$$\therefore -3 < k \leq -1$$

$$(ii) \textcircled{1} 4k(k+3) \geq 0, \therefore k \leq -3, k \geq 0$$

$$\textcircled{2} (k-2)(k+1) < 0, \therefore -1 < k < 2$$



두 부등식의 공통부분은

$$\therefore 0 \leq k < 2 \therefore -3 < k \leq -1, 0 \leq k < 2$$

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k + a)x + (k^2 + 4k - 2b) = 0$ 이 k 값에 관계없이 중근을 가질 때, $a - b$ 의 값은? (단, a, b 는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$$D' = (k + a)^2 - (k^2 + 4k - 2b) = 0$$

$$(2a - 4)k + a^2 + 2b = 0$$

모든 k 에 대해서 성립하려면,

$$2a - 4 = 0 \text{ 이고 } a^2 + 2b = 0$$

$$\therefore a = 2, \quad b = -2$$

$$\therefore a - b = 4$$

8. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 4x + ka - 2k + b = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은?

① 0 ② 2 ③ 4 ④ 6 ⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$$D' = 2^2 - (ka - 2k + b) = 0$$

$$\Rightarrow (2 - a)k + 4 - b = 0$$

모든 k 에 대하여 성립하려면

$$a = 2, b = 4$$

$$\therefore a + b = 6$$

9. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 2(k-a)x + k^2 + a^2 - b + 1 = 0$ 이 k 의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b 의 값은?

① $a = 1, b = 1$

② $a = 1, b = 0$

③ $a = 0, b = 1$

④ $a = -1, b = 0$

⑤ $a = -1, b = -1$

해설

$\frac{D}{4} = 0$ 이므로,

$$(k-a)^2 - (k^2 + a^2 - b + 1) = 0$$

$$-2ak + (b-1) = 0$$

$$\therefore a = 0, b = 1$$

10. x 에 대한 이차방정식 $x^2 - 3px + 4q + 2 = 0$ 의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q 에 대하여 다음 중 알맞은 q 의 값으로 가장 작은 것은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근의 비가 1:2이므로 두 근을 $\alpha, 2\alpha$ 라 하면
근과 계수의 관계에 의하여

$$\alpha + 2\alpha = 3p \cdots \cdots \textcircled{㉠}$$

$$\alpha \cdot 3\alpha = 4q + 2 \cdots \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 $\alpha = p$ 이것을 ㉡에 대입하면

$$2p^2 = 4q + 2 \quad \therefore p^2 = 2q + 1 \cdots \cdots \textcircled{㉢}$$

한편, p, q (실수)에서 주어진 방정식은

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$$D = (-3p)^2 - 4(4q + 2) > 0$$

$$\therefore 9p^2 - 16q - 8 > 0$$

$$\text{위 식을 ㉢에 대입하면 } (18q + 9) - 16p - 8 > 0$$

$$2q + 1 > 0 \quad \therefore q > -\frac{1}{2}$$

11. 이차방정식 $x^2 - 2ax + 2a + 4 = 0$ 의 두 근이 모두 정수일 때, 정수 a 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 α, β 라 하면

$$x^2 - 2ax + 2a + 4 = (x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = 2a + 4$$

$$\alpha\beta - \alpha - \beta = 4$$

$$(\alpha - 1)(\beta - 1) = 5$$

α, β 는 정수이므로

$$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 6), (6, 2), (0, -4), (-4, 0)$$

$$\therefore a = 4, -2$$

12. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$ 의 두 근의 비가 1 : 3이 되도록 상수 k 의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$

② $\pm 2\sqrt{3}$

③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$

⑤ ± 2

해설

한 근을 α 라 하면 다른 한 근은 3α

$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9 \quad \therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$

$\therefore k = \pm 2\sqrt{3}$

13. 이차방정식 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha^2 + \frac{1}{\beta}$, $\beta^2 + \frac{1}{\alpha}$ 을 두 근으로 하는 이차방정식을 보기에서 고르면?

① $x^2 - 10x + 3 = 0$

② $x^2 - 10x + 5 = 0$

③ $x^2 - 3x + 3 = 0$

④ $x^2 - 3x + 5 = 0$

⑤ $x^2 - 5x + 7 = 0$

해설

$x^2 - 3x + 1 = 0$ 의 두 근이 α, β 이므로

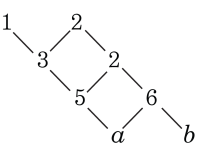
$$\alpha + \beta = 3, \quad \alpha\beta = 1$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta + \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = 10$$

$$\left(\alpha^2 + \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2 + \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha^2\beta^2 + \alpha + \beta + \frac{1}{\alpha\beta} = 5$$

$$\therefore x^2 - 10x + 5 = 0$$

14. 다음 그림은 수의 규칙을 나타낸 것이다. a , b 와 대응하는 수를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?



- ① $x^2 - 5x + 6 = 0$
- ② $x^2 - 11x + 30 = 0$
- ③ $x^2 - 41x + 330 = 0$
- ④ $x^2 - 7x + 8 = 0$
- ⑤ $x^2 - 15x + 12 = 0$

해설

왼쪽 $1-3-5-a$ 는 잇줄 두 수의 합
오른쪽 $2-2-6-b$ 는 잇줄 두 수의 곱
 $\therefore a = 5 + 6 = 11, b = 5 \times 6 = 30$
11, 30을 두 근으로 하는 이차방정식은
 $\therefore x^2 - 41x + 330 = 0$

15. 이차방정식 $x^2 - 2x + 3 = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, $\alpha - \frac{1}{\beta}, \beta - \frac{1}{\alpha}$ 을

두 근으로 갖는 이차방정식을 구하면?

① $x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

③ $x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0$

⑤ $x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

② $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$

④ $x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{4}{3} = 0$

해설

$\alpha + \beta = 2, \alpha\beta = 3$ 이므로

$$\begin{aligned}\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) + \left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) &= (\alpha + \beta) - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) \\ &= \alpha + \beta - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} \\ &= 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\end{aligned}$$

$$\left(\alpha - \frac{1}{\beta}\right) \times \left(\beta - \frac{1}{\alpha}\right) = \alpha\beta + \frac{1}{\alpha\beta} - 2 = \frac{4}{3}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$$x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} = 0$$

16. 이차방정식 $x^2 + 2(k - 11)x - k + 3 = 0$ 이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k 의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β 라 할 때,

$$\alpha\beta = -k + 3 < 0, \alpha + \beta = -2(k - 11) > 0$$

$$\therefore 3 < k < 11$$

17. 이차방정식 $ax^2 + bx + c = 0$ 에서 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$, $b^2 - 4ac > 0$ 일 때, 다음 중 옳은 것은?

- ① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.
- ② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.
- ③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.
- ④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.
- ⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2 - 4ac > 0$ 이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.
두 실근을 α, β 라 하면
 $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$ 이므로
 $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} > 0$
 $\alpha\beta = \frac{c}{a} > 0$
 $\therefore \alpha > 0, \beta > 0$

18. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m-1 = 0$ 의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$

② $m \geq 5$

③ $m < 5$

④ $m \leq 5$

⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$$

$$\text{즉 } m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$ 이므로

$$m \leq 1 \text{ 또는 } m \geq 5$$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$ 이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m-1 > 0$ 이어야 하므로 $m > \frac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$