1. x에 대한 이차방정식 $(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이 허근을 가질 때, $k>m$이다. m의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$(k^2-1)x^2-2(k-1)x+1=0$이

허근을 가지려면

$\frac{D}{4}=(k-1)^2-(k^2-1)<0$

$(k^2-2k+1)-(k^2-1)<0$

$-2k+2<0,\ k>1$

$\therefore\ m=1$

2. x에 대한 이차방정식 $(2m+3)x^2-2mx+1=0$이 허근을 갖도록 하는 실수 m의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1 < m < 3$

해설

주어진 방정식이 이차일 조건 : $m \neq -\dfrac{3}{2}$

이차식이 허근을 가질 조건 : $D < 0$

$\dfrac{D}{4} = (-m)^2 - (2m+3) < 0$

$m^2 - 2m - 3 < 0$

$(m-3)(m+1) < 0$

$\therefore \ -1 < m < 3$

3. 이차방정식 $x^2+8x+2k=0$이 허근을 가지도록 하는 정수 k의 값의 최솟값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

이차방정식에서 허근을 가질 조건은

$\frac{D'}{4}<0$이어야 하므로,

$16-2k<0,\ 2k>16,\ \therefore\ k>8$

$\therefore$ 정수 k의 최소값은 9

4. x에 관한 두 이차방정식 $x^2+4kx-12k=0$, $x^2-2kx+k+2=0$이 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3<k<2$

해설

$x^2+4kx-12k=0\cdots$ ㉠

$x^2-2kx+k+2=0\cdots$ ㉡이라 하면,

㉠ 의 판별식 :

$$\frac{D'}{4}=(2k)^2+(12k)=4k^2+12k=4k(k+3)$$

㉡의 판별식 :

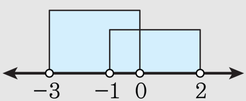
$$\frac{D'}{4}=(-k)^2-(k+2)=k^2-k-2=(k-2)(k+1)$$

㉠, ㉡ 식이 허근을 갖기 위해서는

$\frac{D'}{4}<0$ 을 만족해야 한다. 적어도 하나가 허근을 갖도록 하는 경우이므로, 두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 k의 범위를 구하면 된다.

㉠ $4k(k+3)<0 \quad \therefore \quad -3<k<0$

㉡ $(k-2)(k+1)<0 \quad \therefore \quad -1<k<2$



$\therefore \quad -3<k<2$

5. x에 관한 두 이차방정식 $x^2+4kx-12k=0$, $x^2-2kx+k+2=0$이 동시에 허근을 갖도록 하는 k의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-1<k<0$

해설

$x^2+4kx-12k=0\cdots$ ㉠

$x^2-2kx+k+2=0\cdots$ ㉡이라 하면,

㉠ 의 판별식 :

$$\frac{D'}{4}=(2k)^2+(12k)=4k^2+12k=4k(k+3)$$

㉡의 판별식 :

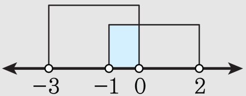
$$\frac{D'}{4}=(-k)^2-(k+2)=k^2-k-2=(k-2)(k+1)$$

㉠, ㉡식이 허근을 갖기 위해서는,

$\frac{D'}{4}<0$ 을 만족해야 한다.

㉠ $4k(k+3)<0 \quad \therefore \quad -3<k<0$

㉡ $(k-2)(k+1)<0 \quad \therefore \quad -1<k<2$



두 부등식의 공통부분은 $\therefore \quad -1<k<0$

6. x에 관한 두 이차방정식 $x^2 + 4kx - 12k = 0$, $x^2 - 2kx + k + 2 = 0$이 하나는 허근, 하나는 실근을 갖도록 하는 k 의 값의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $-3 < k \le -1,\ 0 \le k < 2$

해설

$x^2 + 4kx - 12k = 0 \cdots$ ㉠

$x^2 - 2kx + k + 2 = 0 \cdots$ ㉡이라 하면,

㉠ 의 판별식 :

$$\frac{D'}{4} = (2k)^2 + (12k) = 4k^2 + 12k = 4k(k+3)$$

㉡의 판별식 :

$$\frac{D'}{4} = (-k)^2 - (k+2) = k^2 - k - 2 = (k-2)(k+1)$$

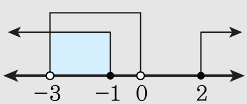
㉠식이 허근, ㉡식이 실근을 가질 경우

(i)와 ㉠식이 실근,

㉡식이 허근을 가질 경우 (ii)가 존재한다.

(i) ㉠ $4k(k+3) < 0$, $\therefore\ -3 < k < 0$

㉡ $(k-2)(k+1) \ge 0$, $\therefore\ k \le -1,\ k \ge 2$

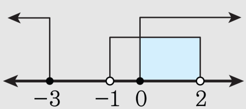


두 부등식의 공통부분은

$\therefore\ -3 < k \le -1$

(ii) ㉠ $4k(k+3) \ge 0$, $\therefore\ k \le -3,\ k \ge 0$

㉡ $(k-2)(k+1) < 0$, $\therefore\ -1 < k < 2$



두 부등식의 공통부분은

$\therefore\ 0 \le k < 2$ $\therefore\ -3 < k \le -1,\ 0 \le k < 2$

7. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k+a)x+(k^2+4k-2b)=0$이 k값에 관계없이 중근을 가질 때, $a-b$의 값은? (단, a, b는 상수)

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

중근을 갖으려면 판별식이 0이어야 한다.

$D' = (k+a)^2-(k^2+4k-2b)=0$

$(2a-4)k+a^2+2b=0$

모든 k에 대해서 성립하려면,

$2a-4=0$이고 $a^2+2b=0$

$\therefore\ a=2, \quad b=-2$

$\therefore\ a-b=4$

8. x에 대한 이차방정식 $x^2-4x+ka-2k+b=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가지도록 실수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① 0　② 2　③ 4　④ 6　⑤ 8

해설

중근을 가지려면 판별식은 0이다.

$D' = 2^2-(ka-2k+b)=0$

$\Rightarrow \quad (2-a)k+4-b=0$

모든 k에 대하여 성립하려면

$a=2,\ b=4$

$\therefore \ a+b=6$

9. x에 대한 이차방정식 $x^2-2(k-a)x+k^2+a^2-b+1=0$이 k의 값에 관계없이 중근을 가질 때, a, b의 값은?

① $a=1,\ b=1$

② $a=1,\ b=0$

③ $a=0,\ b=1$

④ $a=-1,\ b=0$

⑤ $a=-1,\ b=-1$

해설

$\frac{D}{4}=0$이므로,

$(k-a)^2-(k^2+a^2-b+1)=0$

$-2ak+(b-1)=0$

$\therefore\ a=0, b=1$

10. x에 대한 이차방정식 $x^2-3px+4q+2=0$의 두 근의 비가 1:2가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 다음 중 알맞은 q의 값으로 가장 작은 것은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근의 비가 $1:2$이므로 두 근을 α, 2α라 하면

근과 계수의 관계에 의하여

$\alpha+2\alpha=3p\cdots\cdots$ ㉠

$\alpha\cdot 3\alpha=4q+2\cdots\cdots$ ㉡

㉠에서 $\alpha=p$ 이것을 ㉡에 대입하면

$2p^2=4q+2 \quad \therefore p^2=2q+1\cdots\cdots$ ㉢

한편, p, q(실수)에서 주어진 방정식은

서로 다른 두 실근을 가져야 하므로

$D=(-3p)^2-4(4q+2)>0$

$\therefore\ 9p^2-16q-8>0$

위 식을 ㉢에 대입하면 $(18q+9)-16p-8>0$

$2q+1>0 \quad \therefore q>-\frac{1}{2}$

11. 이차방정식 $x^2-2ax+2a+4=0$의 두 근이 모두 정수일 때, 정수 a 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

두 근을 α,β라 하면

$x^2-2ax+2a+4=(x-\alpha)(x-\beta)=0$

$\therefore\ \alpha+\beta=2a,\ \ \alpha\beta=2a+4$

$\alpha\beta-\alpha-\beta=4$

$(\alpha-1)(\beta-1)=5$

α,β는 정수이므로

$\therefore\ (\alpha,\beta)=(2,6),(6,2),(0,-4),(-4,0)$

$\therefore\ a=4,-2$

12. 이차방정식 $x^2 - 2kx + 9 = 0$의 두 근의 비가 $1 : 3$이 되도록 상수 k의 값을 구하면?

① $\pm 2\sqrt{2}$　② $\pm 2\sqrt{3}$　③ $\pm 2\sqrt{5}$

④ $\pm 2\sqrt{6}$　⑤ ± 2

해설

한 근을 α라 하면 다른 한 근은 3α

$\therefore$ 두 근의 곱은 $3\alpha^2 = 9$　$\therefore \alpha = \pm\sqrt{3}$

두 근의 합은 $\alpha + 3\alpha = \pm 4\sqrt{3} = 2k$

$\therefore$ $k = \pm 2\sqrt{3}$

13. 이차방정식 $x^2-3x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^2+\frac{1}{\beta}$, $\beta^2+\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 하는 이차방정식을 보기에서 고르면?

① $x^2-10x+3=0$

② $x^2-10x+5=0$

③ $x^2-3x+3=0$

④ $x^2-3x+5=0$

⑤ $x^2-5x+7=0$

해설

$x^2-3x+1=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

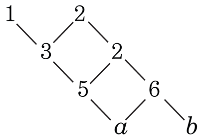
$\alpha+\beta=3,\quad \alpha\beta=1$

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=10$$

$$\left(\alpha^2+\frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^2+\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha^2\beta^2+\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha\beta}=5$$

$\therefore\ x^2-10x+5=0$

14. 다음 그림은 수의 규칙을 나타낸 것이다. a, b 와 대응하는 수를 두 근으로 하는 이차방정식을 구하면?



① $x^2-5x+6=0$ ② $x^2-11x+30=0$

③ $x^2-41x+330=0$ ④ $x^2-7x+8=0$

⑤ $x^2-15x+12=0$

해설

왼쪽 $1-3-5-a$는 윗줄 두 수의 합

오른쪽 $2-2-6-b$는 윗줄 두 수의 곱

$\therefore a=5+6=11,\ b=5\times6=30$

11, 30을 두 근으로 하는 이차방정식은

$\therefore\ x^2-41x+330=0$

15. 이차방정식 $x^2-2x+3=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha-\frac{1}{\beta}$, $\beta-\frac{1}{\alpha}$을 두 근으로 갖는 이차방정식을 구하면?

① $x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$
② $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$
③ $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$
④ $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}=0$
⑤ $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}=0$

해설

$\alpha+\beta=2,\ \alpha\beta=3$이므로

$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)+\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=(\alpha+\beta)-\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)$$
$$=\alpha+\beta-\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}$$
$$=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$$

$$\left(\alpha-\frac{1}{\beta}\right)\times\left(\beta-\frac{1}{\alpha}\right)=\alpha\beta+\frac{1}{\alpha\beta}-2=\frac{4}{3}$$

따라서 구하는 이차방정식은

$x^2-\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}=0$

16. 이차방정식 $x^2+2(k-11)x-k+3=0$이 서로 다른 부호의 실근을 갖고, 양근이 음근의 절댓값보다 크기 위한 정수 k의 개수는?

① 5개 ② 6개 ③ 7개 ④ 8개 ⑤ 9개

해설

두 근을 α, β라 할 때,

$\alpha\beta=-k+3<0$, $\alpha+\beta=-2(k-11)>0$

$\therefore \quad 3<k<11$

17. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$에서 $a<0,\ b>0,\ c<0,\ b^2-4ac>0$일 때, 다음 중 옳은 것은?

① 두 근은 모두 양이고 서로 다르다.

② 두 근은 모두 음이고 서로 다르다.

③ 양근 하나, 음근 하나를 가진다.

④ 양근, 음근, 0 을 가리지 않고 가질 수 있다.

⑤ 두 근은 서로 다른 부호이고, 양근이 음근의 절대값보다 크다.

해설

$b^2-4ac>0$이므로 서로 다른 두 실근을 갖는다.

두 실근을 $\alpha,\ \beta$라 하면

$a<0,\ b>0,\ c<0$이므로

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}>0$$

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}>0$$

$\therefore\ \alpha>0,\ \beta>0$

18. x에 대한 이차방정식 $x^2 + 2(m-2)x + 2m - 1 = 0$의 두 근이 모두 음수일 때, 실수 m 의 값의 범위를 구하면?

① $m > 5$ ② $m \geq 5$ ③ $m < 5$

④ $m \leq 5$ ⑤ $-5 \leq x \leq 5$

해설

주어진 이차방정식이 두 실근을 가져야 하므로

$D/4 = (m-2)^2 - 2m + 1 \geq 0$

즉 $m^2 - 4m + 4 - 2m + 1 = m^2 - 6m + 5 \geq 0$

따라서 $(m-5)(m-1) \geq 0$이므로

$m \leq 1$ 또는 $m \geq 5$

또 두근의 합 $-2(m-2) < 0$이어야 하므로 $m > 2$

또 두근의 곱 $2m - 1 > 0$이어야 하므로 $m > \dfrac{1}{2}$

따라서 $m \geq 5$