1. 이차함수 $y = 2x^2 + kx - k$ 의 그래프가 x축과 만나도록 하는 상수 k 의 값이 아닌 것은?

① -8　② -1　③ 0　④ 5　⑤ 8

해설

이차방정식 $2x^2 + kx - k = 0$에서 $D = k^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-k) \geq 0$이어야 하므로

$k^2 + 8k \geq 0,\ k(k+8) \geq 0$

$\therefore k \leq -8$ 또는 $k \geq 0$

따라서 위의 k의 값의 범위에 속하지 않는 것은 ②이다.

2. 포물선 $y = -x^2 + kx$ 와 직선 $y = x + 1$ 이 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 k 의 범위는?

① $k > 2,\ k < -1$ ② $k > 3,\ k < -1$ ③ $k > 1,\ k < -1$
④ $k > 3,\ k < -2$ ⑤ $k > 3,\ k < -3$

해설

포물선과 직선이 다른 두 점에서 만나므로
$-x^2 + kx = x + 1, x^2 + (1 - k)x + 1 = 0$ 에서
$D = (1 - k)^2 - 4 > 0$
$k^2 - 2k - 3 = (k - 3)(k + 1) > 0$
$\therefore k > 3$ 또는 $k < -1$

3. 다음 중 최솟값을 갖지 않는 것은?

① $y=3x^2+4$
② $y=2(x+4)^2-5$
③ $y=\frac{1}{2}(x-3)^2+1$
④ $y=-x^2+3$
⑤ $y=x^2+2x+1$

해설

이차항의 계수가 양수일 때 최솟값을 갖는다.

4. 이차함수 $y = -x^2 + 10x - 13$ 의 최댓값을 m , 이차함수 $y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1$ 의 최솟값을 n 이라고 할 때, mn 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$y = -x^2 + 10x - 13 = -(x-5)^2 + 12$

최댓값 $m = 12$

$y = \frac{1}{2}x^2 + x + 1 = \frac{1}{2}(x+1)^2 + \frac{1}{2}$

최솟값 $n = \frac{1}{2}$

$\therefore mn = 12 \times \frac{1}{2} = 6$

5. 이차함수 $y=-2+3x-x^2\ (-1\le x\le 2)$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하면?

① $-\frac{23}{4}$ ② $-\frac{16}{3}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $\frac{7}{4}$ ⑤ $\frac{11}{3}$

해설

$y=-(x-\frac{3}{2})^2+\frac{1}{4}$ 이므로

$x=\frac{3}{2}$ 가 x의 값의 범위 $-1\le x\le 2$ 에 포함되므로

$x=\frac{3}{2}$ 에서 최솟값 $\frac{1}{4}$ 를 갖고,

$x=-1$ 에서 최댓값 -6 을 갖는다.

따라서 최솟값과 최댓값의 합은 $-\frac{23}{4}$ 이다.

6. 이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와 x축과의 교점의 x좌표가 6, b일 때, $a + b$의 값은?

① 11　　② 12　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

이차함수 $y = x^2 - 8x + a$의 그래프와
x축과의 교점의 x좌표는
이차방정식 $x^2 - 8x + a = 0$의 실근이다.
$x^2 - 8x + a = 0$에 $x = 6$을 대입하면
$36 - 48 + a = 0$에서 $a = 12$
따라서 $x^2 - 8x + 12 = 0$에서 $(x-2)(x-6) = 0$
$x = 2$ 또는 $x = 6$
$\therefore\ b = 2 \therefore\ a + b = 14$

7. 이차함수 $y = x^2 + (k-3)x + k$ 의 그래프가 x 축과 만나지 않을 때, 실수 k 의 값의 범위는?

① $-1 < k < 7$ ② $-1 < k < 8$ ③ $0 < k < 9$
④ $1 < k < 9$ ⑤ $1 < k < 10$

해설

주어진 이차함수의 그래프가
x 축과 만나지 않으려면
이차방정식 $x^2 + (k-3)x + k = 0$ 이
실근을 갖지 않아야 하므로
$D = (k-3)^2 - 4k < 0$
$k^2 - 10k + 9 < 0$, $(k-1)(k-9) < 0$
$\therefore\ 1 < k < 9$

8. 함수 $y = -x^2 + kx$의 그래프가 직선 $y = -x + 4$에 접할 때, 양수 k의 값은?

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2 ④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

해설

$y = -x^2 + kx$가 $y = -x + 4$에 접하려면
$4 - x = -x^2 + kx \Rightarrow x^2 - (k+1)x + 4 = 0$의 판별식은 $D = 0$이어야 한다.
$D = (k+1)^2 - 16 = 0 \Rightarrow k + 1 = \pm 4$
$\therefore k = 3 \ (\because k > 0)$

9. 이차함수 $y = x^2 - 6x - 5$ 의 최솟값은?

① -14 ② 14 ③ -5 ④ 5 ⑤ 4

해설

$y = x^2 - 6x - 5$
$= x^2 - 6x + 9 - 9 - 5$
$= (x-3)^2 - 14$
$\therefore x = 3$ 일 때, 최솟값 -14 를 가진다.

10. 이차함수$y = -x^2 + 2x + 10$ 의 최댓값을 M , $y = 3x^2 + 6x - 5$ 의 최솟값을 m 이라 할 때, $M + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 3

해설

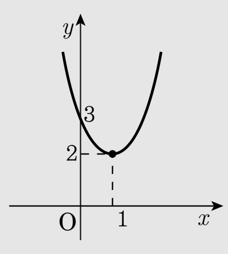
$y = -x^2 + 2x + 10$
$= -(x-1)^2 + 11$ 에서 $M = 11$
$y = 3x^2 + 6x - 5$
$= 3(x+1)^2 - 8$ 에서 $m = -8$
$\therefore M + m = 11 - 8 = 3$

11. 함수 $y = x^2 - 2x + 3$ 의 x의 범위가 $0 < x < 1$ 일 때, 이 함수의 함숫값의 범위을 구하면?

① $-2 < y < 3$　② $-2 < y < 2$　③ $0 < y < 3$
④ $0 < y < 2$　⑤ $2 < y < 3$

해설

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$
따라서 함수의 그래프는 다음의 그림과 같다.



$f(0) = 3,\ f(1) = 2$ 이므로
함숫값의 범위은 $2 < y < 3$

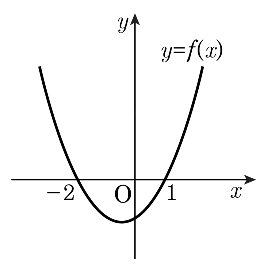
12. 합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x , 두 수의 곱을 y 라 할 때, 두 수의 곱의 최댓값을 구하면?

① 11 ② 21 ③ 25 ④ 81 ⑤ 100

해설

합이 18 인 두 수가 있다. 한 수를 x 로 두면 나머지 한 수는 $(18-x)$ 이다.
$y = x(18-x) = -x^2 + 18x = -(x^2 - 18x + 81) + 81$
$y = -(x-9)^2 + 81$
따라서 두 수의 곱의 최댓값은 81 이다.

13. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



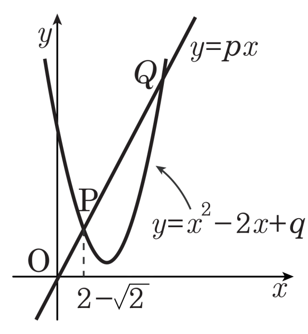
① -3　　② -2　　③ -1

④ 0　　⑤ 1

해설

$y = f(x+a)$ 의 그래프는 $y = f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.
$y = f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y = f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a) = 0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a = 5$
$\therefore a = -3$

14. 다음 그림과 같이 직선 $y = px$ 와 이차함수 $y = x^2 - 2x + q$ 의 그래프가 두 점 P, Q 에서 만나고 점 P 의 x 좌표가 $2 - \sqrt{2}$ 이다. 이때, 유리수 p, q 의 곱 pq 의 값은?



① 1　② 4　③ 6　④ 9　⑤ 12

해설

두 점 P, Q 의 x 좌표는
이차방정식 $x^2 - 2x + q = px$ 의 두 실근이다.
$x^2 - (p+2)x + q = 0$ 에서 p, q 는 유리수이므로
한 근이 $2 - \sqrt{2}$ 이면 다른 한 근은 $2 + \sqrt{2}$ 이다.
따라서 근과 계수의 관계에 의하여
$(2 - \sqrt{2}) + (2 + \sqrt{2}) = p + 2$
$\therefore\ p = 2$
$(2 - \sqrt{2})(2 + \sqrt{2}) = q$
$\therefore\ q = 2$
$\therefore\ pq = 4$

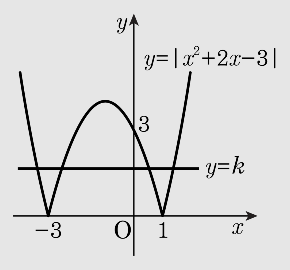
15. x에 대한 방정식 $|x^2+2x-3|=k$가 양의 근 2개와 음의 근 2개를 갖도록 하는 상수 k의 값의 범위는?

① $k \geq 3$　② $k > 4$　③ $3 \leq k < 4$

④ $0 < k < 3$　⑤ $0 < k < 4$

해설

방정식 $|x^2+2x-3|=k$의 근은 두 함수 $y=|x^2+2x-3|$, $y=k$의 그래프의 교점의 x좌표와 같다.
따라서 그림에서 교점의 x좌표가 양수 2개,
음수 2개가 되려면 $0 < k < 3$



16. 이차함수 $y = -x^2 + 2kx + 2k$ 의 최댓값을 M 이라 할 때, M 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y = -x^2 + 2kx + 2k$
$= -(x^2 - 2kx) + 2k$
$= -(x-k)^2 + k^2 + 2k$

최댓값 $M = k^2 + 2k = (k+1)^2 - 1$

따라서 M 의 최솟값 -1 이다.

17. 함수 $y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 이 $x=m$ 에서 최댓값 M 을 갖는다. 이 때, $M+m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x\right)-6$ 에서
$x^2+4x+5=t$ 로 놓으면
$y=-\left(x^2+4x+5\right)^2-2\left(x^2+4x+5\right)+4$
$=-t^2-2t+4=-(t+1)^2+5$
그런데 $t=x^2+4x+5=(x+2)^2+1\geq 1$ 이므로
$t=1$, 즉 $x=-2$ 일 때 최댓값 1 을 갖는다.
따라서, $m=-2,\ M=1$
$\therefore M+m=-1$

18. x, y가 실수일 때, $-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12$의 최댓값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$-x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 = -(x+2)^2 - (y-3)^2 + 1$
이 때, x, y가 실수이므로
$(x+2)^2 \geq 0,\ (y-3)^2 \geq 0$
$\therefore -x^2 - y^2 - 4x + 6y - 12 \leq 1$
따라서 $x = -2,\ y = 3$일 때
주어진 식의 최댓값은 1이다.

19. 두 실수 x, y가 $x^2 + y^2 + 4x + y - 2 = 0$을 만족시킬 때, y의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$x^2 + 4x + (y^2 + y - 2) = 0$에서 x가 실수이므로

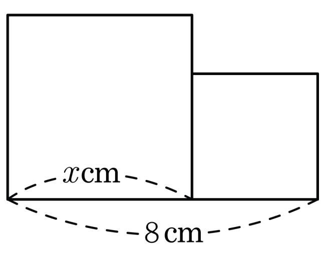
$\frac{D}{4} = 4 - y^2 - y + 2 \geq 0$

$(y + 3)(y - 2) \leq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 2$

따라서 y의 최댓값은 2, 최솟값은 -3이다.

20. 다음 그림과 같이 길이가 8cm 인 선분을 둘로 나누어, 그 각각을 한 변으로 하는 정사각형을 만들었다. 두 정사각형의 넓이의 합을 $y\text{cm}^2$ 라 할 때, 두 정사각형의 넓이의 합이 최소가 되게 하는 $x(\text{cm})$ 의 값과 그 때의 넓이 $y(\text{cm}^2)$ 를 구하여라.



① $x = 2, y = 12$　② $x = 2, y = 14$　③ $x = 2, y = 16$
④ $x = 4, y = 32$　⑤ $x = 4, y = 34$

해설

$$y = x^2 + (8 - x)^2$$
$$= 2(x^2 - 8x + 16 - 16) + 64$$
$$= 2(x - 4)^2 + 32$$

따라서 $x = 4$ 일 때 $y = 32$ 이다.

21. 둘레의 길이가 24m 인 직사각형 중 그 넓이가 가장 넓을 때의 넓이를 구하면?

① $30\,\mathrm{cm}^2$ ② $32\,\mathrm{cm}^2$ ③ $34\,\mathrm{cm}^2$
④ $36\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $38\,\mathrm{cm}^2$

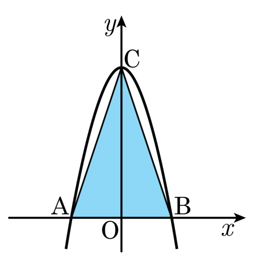
해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{m}$, 세로의 길이를 $(24-x)\,\mathrm{m}$, 넓이를 $y\,\mathrm{m}^2$ 라 하면

$$
\begin{aligned}
y &= x(12-x) \\
&= -x^2+12x \\
&= -(x^2-12x+36-26) \\
&= -(x-6)^2+36
\end{aligned}
$$

따라서 $x=6$ 일 때 넓이의 최댓값은 $36\,\mathrm{m}^2$ 이다.

22. $y = -x^2 + 9$ 의 그래프와 x 축과의 교점을 A, B 라고 하고, y 축과의 교점을 C 라고 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이를 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 27

해설

점 C 는 꼭짓점이므로 $(0, 9)$, 점 A 와 B 는 $y = 0$ 일 때, x 좌표이므로

$0 = -x^2 + 9$

$\therefore x = \pm 3$

$\therefore \mathrm{A} = (-3, 0), \mathrm{B} = (3, 0)$

$\triangle$ABC 의 넓이$= \dfrac{1}{2} \times 6 \times 9 = 27$

23. 둘레의 길이가 $24\,\mathrm{cm}$ 인 부채꼴의 넓이가 최대일 때, 이 부채꼴의 호의 길이를 구하여라.

▶ 답: ______ cm

▷ 정답: 12 cm

해설

반지름 $x\,\mathrm{cm}$, 호의 길이를 $(24-2x)\,\mathrm{cm}$ 라 두면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x(24-2x) \\ &= x(12-x) \\ &= -x^2+12x \\ &= -(x^2-12x+36)+36 \\ &= -(x-6)^2+36 \end{aligned}$$

따라서 꼭짓점이 $(6,36)$ 이므로 반지름의 길이가 $6\,\mathrm{cm}$ 일 때, 부채꼴의 넓이가 최댓값 $36\,\mathrm{cm}^2$ 를 가진다.

따라서 호의 길이는 $24-2x=12\,\mathrm{cm}$ 이다.

24. 직각을 낀 두 변의 길이 x, y의 합이 10이고 넓이가 8 이상인 직각삼각형이 있을 때, 다음 물음에 알맞게 답한 것을 고르면?

(1) x의 값의 범위를 구하여라.
(2) 빗변의 길이를 z라 할 때, z^2을 x에 관한 식으로 나타내어라.
(3) z^2의 최댓값과 최솟값을 구하여라.

① (1) $2 \le x \le 9$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 52

② (1) $1 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 51

③ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $2x^2 - 20x + 100$, (3) 68, 50

④ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 52

⑤ (1) $2 \le x \le 8$, (2) $x^2 - 20x + 100$, (3) 69, 50

해설

(1) $x + y = 10$에서 $y = 10 - x$이고
삼각형의 넓이가 8 이상이므로
$\frac{1}{2}xy \ge 8, \ \frac{1}{2}x(10-x) \ge 8$
$x^2 - 10x + 16 \le 0, \ (x-2)(x-8) \le 0$
$\therefore 2 \le x \le 8$
(2) 피타고라스의 정리에 의해
$z^2 = x^2 + y^2 = x^2 + (10-x)^2$
$= 2x^2 - 20x + 100$
(3) $z^2 = 2x^2 - 20x + 100 = 2(x-5)^2 + 50$
이 때, $2 \le x \le 8$이므로 z^2은 $x = 5$일 때
최솟값 50 , $x = 2$ 또는 $x = 8$일 때
최댓값 68을 갖는다.

25. 어떤 축구 선수가 축구공을 찼을 때, t 초 후의 높이를 hm 라고 하면 $h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 의 관계가 성립한다. 축구공이 가장 높이 올라갔을 때의 높이를 구하여라.

▶ 답: ______________ m

▷ 정답: $\frac{9}{2}$ m

해설

$h = -\frac{1}{2}t^2 + 3t$ 에서 $h = -\frac{1}{2}(t-3)^2 + \frac{9}{2}$ 이다.

따라서 가장 높이 올라갔을 때의 높이는 $\frac{9}{2}$m 이다.