1. 다항식 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5x - 6$을 $x - 2$, $x - 1$로 나누었을 때의 나머지를 각각 a, b라 할 때, $a + b$의 값은?

① -8 ② -2 ③ -16 ④ 4 ⑤ 2

해설

$f(x) = (x-2)Q(x) + a$

$f(x) = (x-1)Q'(x) + b$

$f(2) = 4 = a,\ f(1) = -2 = b$

$\therefore a + b = 2$

2. $(x^2+x)(x^2+x+1)-6$을 인수분해하면?

① $(x-1)(x+2)(x^2+x+3)$ ② $(x-1)(x+2)(x^2+x-3)$

③ $(x-2)(x+1)(x^2+x+3)$ ④ $(x-1)(x+2)(x^2-x+3)$

⑤ $(x+1)(x-2)(x^2-x+3)$

해설

$x^2+x=X$라 하자.

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+1)-6 \\ &= X^2+X-6 \\ &= (X+3)(X-2) \\ &= (x^2+x+3)(x^2+x-2) \\ &= (x-1)(x+2)(x^2+x+3)\end{aligned}$$

3. $x = 1 + 2i$, $y = \dfrac{1+2i}{1-i}$, $z = \dfrac{1-2i}{1-i}$ 일 때,$xy + xz$ 의 값을 구하면?

① $-1 + 3i$　② $-1 - 2i$　③ $-1 + 2i$

④ $-1 - i$　⑤ $-1 + i$

해설

$x = 1 + 2i,\ y = \dfrac{1+2i}{1-i},\ z = \dfrac{1-2i}{1-i}$

$$\begin{aligned}\therefore\ xy + xz &= \frac{(1+2i)^2}{1-i} + \frac{(1-2i)(1+2i)}{1-i} \\ &= \frac{-3+4i+5}{1-i} \\ &= \frac{2+4i}{1-i} \\ &= -1+3i\end{aligned}$$

4. 다음 계산 과정에서 최초로 틀린 부분은?

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{-2}} &= \boxed{\quad \text{㉠} \quad} \frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{-2}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\quad \text{㉡} \quad} \frac{\sqrt{-16}}{\sqrt{-2}\cdot\sqrt{-2}} \\
&= \boxed{\quad \text{㉢} \quad} \frac{\sqrt{-16}}{2} \\
&= \boxed{\quad \text{㉣} \quad} \frac{4i}{2} \\
&= \boxed{\quad \text{㉤} \quad} = \sqrt{-4}
\end{aligned}
$$

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉢

해설

$\sqrt{-2}\sqrt{-2} = \sqrt{2}i\sqrt{2}i = 2i^2 = -2$

따라서 최초로 틀린 부분은 ㉢이다.

5. 이차방정식 $x^2 + 2(k-1)x + 4 = 0$ 이 중근을 갖도록 하는 상수 k 값들의 합은?

① 1 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 2

해설

중근을 가지려면 판별식 $D = 0$

$$\frac{D}{4} = (k-1)^2 - 4 = 0$$

$k^2 - 2k - 3 = 0$, $(k-3)(k+1) = 0$

$\therefore\ k = 3, -1$

6. x에 대한 이차방정식 $(k-1)x^2+2kx+k-1=0$이 서로 다른 두 실근을 갖기 위한 자연수 k의 최솟값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

(i) 이차방정식이므로 x^2의 계수는 $k-1 \neq 0$이어야 한다.
따라서 $k \neq 1$

(ii) 서로 다른 두 실근을 갖기 위해서는 판별식 $\frac{D}{4}>0$이어야 하므로

$$\frac{D}{4}=k^2-(k-1)^2>0,\ 2k-1>0$$

$$\therefore k>\frac{1}{2}$$

따라서 자연수 k의 최솟값은 2이다.

7. 이차함수 $y = -(x-1)(x+3)$ 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)(x+3) \\ &= -x^2 - 2x + 3 \\ &= -(x+1)^2 + 4 \end{aligned}$$

$x = -1$ 일 때, 최댓값 4 를 가진다.

8. 사차방정식 $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = 0$의 모든 해의 총합은?

① $-2\sqrt{2}i$　② $\sqrt{2}i$　③ -2

④ -1　⑤ 1

해설

(준식)$= (x-1)(x+1)(x^2+2x+3) = 0$

실근의 합은 $1 + (-1) = 0$

허근의 합은 -2

모든 근의 합은 -2

9. 사차식 $3x^4-5x^2+4x-7$을 이차식 A로 나누었더니 몫이 x^2-2이고 나머지가 $4x-5$일 때, 이차식 A를 구하면?

① $3x^2-2$ ② $3x^2-1$ ③ $3x^2$

④ $3x^2+1$ ⑤ $3x^2+2$

해설

검산식 : $3x^4-5x^2+4x-7=A(x^2-2)+4x-5$

$$A=\frac{3x^4-5x^2-2}{x^2-2}=3x^2+1$$

10. 모든 모서리의 합이 36, 겉넓이가 56 인 직육면체의 대각선의 길이는?

① 5　　② 6　　③ 7　　④ 8　　⑤ 9

해설

직육면체의 가로, 세로, 높이를 각각 $a,\ b,\ c$라 하자.

$4(a+b+c)=36,\ 2(ab+bc+ca)=56$

$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)$

$a^2+b^2+c^2=81-56=25$

$\therefore$ (대각선의 길이) $=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

$=\sqrt{25}=5$

11. x에 대한 항등식 $\frac{x^2-3x-1}{x-1}-\frac{x^2-x-3}{x+1}+\frac{2}{x}=\frac{Ax+B}{x(x-1)(x+1)}$에서 $A-B$의 값을 수치대입법을 이용하여 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

분모를 간단히 할 수 있는 숫자를 대입해 보자.
양변에 $x=2,\ x=-2$를 대입해서 정리하면
$x=2$일 때

$$\frac{4-6-1}{1}-\frac{4-2-3}{3}+\frac{2}{2}=\frac{2A+B}{2\times1\times3}$$

$$-3+\frac{1}{3}+1=\frac{2A+B}{6}$$

$\therefore\ 2A+B=-10\cdots$ ㉠

$x=-2$일 때

$$\frac{4+6-1}{-3}-\frac{4+2-3}{-1}+\frac{2}{-2}=\frac{-2A+B}{(-2)(-3)(-1)}$$

$$-3+3-1=\frac{-2A+B}{-6}$$

$\therefore\ -2A+B=6\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $A=-4,\ B=-2$

$\therefore\ A-B=(-4)-(-2)=-2$

12. x^5+x+1을 $x+1$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 할 때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$x^5+x+1=(x+1)Q(x)+R$

$x=-1$을 양변에 대입하면 $R=-1$

$\therefore\ x^5+x+1=(x+1)Q(x)-1 \cdots$ ㉠

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 $Q(1)$

㉠에 $x=1$을 대입하면 $3=2Q(1)-1$

$\therefore\ Q(1)=2$

13. x에 대한 다항식 x^3+2x^2-ax+b가 x^2+x-2로 나누어 떨어질 때, a^2+b^2의 값을 정하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 5

해설

$$f(x)=x^3+2x^2-ax+b=(x^2+x-2)Q(x)$$
$$=(x+2)(x-1)Q(x)$$

인수정리에 의해 $x=-2, x=1$을 대입하면 우변이 0 이 된다.

$\therefore f(-2)=-8+8+2a+b=0$

$f(1)=1+2-a+b=0$ 연립하면, $a=1, b=-2$

$\therefore\ a^2+b^2=5$

14. x 에 대한 방정식 $ax^2+2x-a-2=0$의 근을 판별하면? (단, a 는 실수)

① 오직 한 실근을 갖는다.

② 항상 서로 다른 두 실근을 갖는다.

③ 중근을 갖는다.

④ 실근을 갖는다.

⑤ 허근을 갖는다.

해설

(i) $a=0$ 일 때 : $x=\dfrac{a+2}{2}$

(ii) $a \neq 0$ 일 때 : 판별식을 구한다.

$D' = 1 + a(a+2) = a^2+2a+1 = (a+1)^2 \geq 0$

$\therefore$ 주어진 방정식은 실근을 갖는다

15. 이차방정식 $4x^2+12x+k=0$의 두 근 α, β에 대하여 $2\alpha=\beta+6$이 성립할 때, $\frac{k}{4}$의 값은?

① -4 ② -2 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

근과 계수와의 관계에서

$\alpha+\beta=-3,\ \alpha\beta=\frac{k}{4}$

$2\alpha=\beta+6$이므로

$2\alpha=(-\alpha-3)+6,\ 3\alpha=3$

$\therefore\ \alpha=1,\ \beta=-4$

$\frac{k}{4}=\alpha\beta=1\cdot(-4)=-4$

16. 이차방정식 $x^2+2(k-1)x+3-k=0$의 두 근이 모두 양수가 되도록 k의 범위를 정하면?

① $-2 \le k \le 3$　　② $2 \le k \le 5$　　③ $1 \le k \le 2$

④ $k \ge 3$　　⑤ $k \le -1$

해설

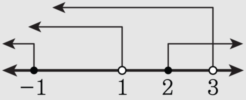
$x^2+2(k-1)x+3-k=0$

(i) $\frac{D}{4}=(k-1)^2-(3-k) \ge 0$

$(k-2)(k+1) \ge 0 \quad \therefore k \ge 2$ 또는 $k \le -1$

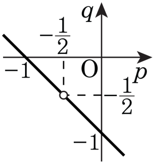
(ii) 두 근의 합, 곱 모두 양수

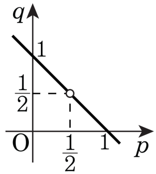
$-2(k-1)>0,\ 3-k>0 \quad \therefore k<1$

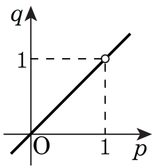


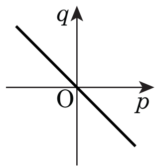
$\therefore \quad k \le -1$

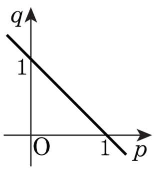
17. x에 관한 두 개의 이차방정식 $x^2-px-q=0$, $x^2-qx-p=0$이 오직 하나의 공통근을 갖는다. 이 때, p, q의 관계를 나타낸 그래프는?

①


②


③


④


⑤


해설

$$\begin{cases} x^2-px-q=0 & \cdots ① \\ x^2-qx-p=0 & \cdots ② \end{cases}$$

①−②에서 $(-p+q)x-(-p+q)=0$

$\therefore\ (-p+q)(x-1)=0$

여기서 $-p+q=0$이면 즉 $q=p$이면

①, ②가 같게 되어 주어진 문제의 조건에 모순이다.

$\therefore\ x=1$이다.

이 때 ①에서 $1-p-q=0$

따라서 구하는 식은 $q=-p+1$(단, $p\neq q$)

18. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c에 대하여 $(a+b-c)(a-b+c)=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① 직각삼각형 ② 이등변삼각형 ③ 정삼각형

④ 예각삼각형 ⑤ 둔각삼각형

해설

$(a+b-c)(a-b+c)$

$=b(b+2c)+(c+a)(c-a)$에서

$\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\}=b^2+2bc+c^2-a^2$

$a^2-b^2+2bc-c^2=-a^2+b^2+c^2+2bc$

$2a^2=2b^2+2c^2$

$\therefore\ a^2=b^2+c^2$

따라서, 이 삼각형은 빗변의 길이가 a인 직각삼각형이다.

19. $|x|(2+3i)+2|y|(1-2i)=6-5i$를 만족하는 실수 $x,\ y$의 순서쌍 $(x,\ y)$를 꼭짓점으로 하는 다각형의 넓이는?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$(2|x|+2|y|)+(3|x|-4|y|)i=6-5i$

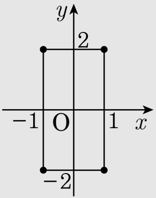
복소수의 상등에 의하여

$|x|+|y|=3,\ 3|x|-4|y|=-5$

두 식을 연립하면

$|x|=1,\quad |y|=2$

$(x,\ y)\ \rightarrow\ (1,\ 2),\ (1,-2),\ (-1,\ 2),\ (-1,\ -2)$



$\therefore$ 직사각형의 넓이 $=2\times 4=8$

20. 두 양의 실수 $x,\ y$ 가 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$을 만족할 때, $\dfrac{x}{y}$ 를 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ ② $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ ③ $\dfrac{-1-\sqrt{17}}{4}$
④ $\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ ⑤ $\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}$

해설

$x > 0,\ y > 0$ 에서 $2x^2 + xy - 2y^2 = 0$의 양변을 y^2 으로 나누면

$2(\dfrac{x}{y})^2 + (\dfrac{x}{y}) - 2 = 0$

$\dfrac{x}{y} = t$라 하면 $(t > 0)$

$2t^2 + t - 2 = 0$

근의 공식에 대입하면

$t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$

$\therefore t = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}\ (t > 0)\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$

21. $x=1$ 일 때 최솟값 -1 을 갖고, y 절편이 3 인 포물선을 그래프로 하는 이차함수의 식을 $y=a(x-p)^2+q$ 라 할 때, 상수 a, p, q 의 곱 apq 의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -4

해설

$y=a(x-1)^2-1=ax^2-2ax+a-1$

$a-1=3$, $a=4$

$y=4(x-1)^2-1$

$\therefore apq=4\times1\times(-1)=-4$

22. 길이가 20m 인 철망을 이용하여 벽을 한 면으로 하는 직사각형 모양의 가축 우리를 만들려고 한다. 가축 우리의 넓이가 최대가 되도록 만들 때, 그 넓이를 구하여라.

▶ 답 : ______ m^2

▷ 정답 : $50\,\underline{\text{m}^2}$

해설

가축 우리의 세로의 길이를 $x\,\text{m}$ 라고 하면
가로의 길이는 $(20-2x)\,\text{m}$ 이다.
가축 우리의 넓이를 $y\,\text{m}^2$ 라고 하면
$y = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$\quad = -2(x-5)^2 + 50$
한편, $x > 0$ 이고 $20 - 2x > 0$ 이므로
$0 < x < 10$
따라서 $x = 5$ 일때
가축 우리의 최대 넓이는 $50\,\text{m}^2$ 이다.

23. $\dfrac{bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)}{bx+ay}+\dfrac{ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)}{bx+ay}$ 을 간단히 하면?

① $a^2x^2+b^2y^2$　　② $(ax+by)^2$

③ $(bx+ay)^2$　　④ $2(a^2x^2+b^2y^2)$

⑤ $(ax+by)(bx+ay)$

해설

(분자)$=bx(a^2x^2+2a^2y^2+b^2y^2)+ay(a^2x^2+2b^2x^2+b^2y^2)$

$=bx(a^2x^2+b^2y^2)+2a^2bxy^2+ay(a^2x^2+b^2y^2)+2ab^2x^2y$

$=(a^2x^2+b^2y^2)(bx+ay)+2abxy(ay+bx)$

$=(bx+ay)(a^2x^2+2abxy+b^2y^2)$

$=(bx+ay)(ax+by)^2$

따라서, (준 식)$=(ax+by)^2$

24. 복소수 z가 $z^2 = \bar{z}$일 때, z이 될 수 있는 수들의 합을 구하여라.(단, $\bar{z}$는 z 의 켤레복소수이다.)

① -2 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

$z = a + bi$ (단, a, b 는 실수)라 하면

$z^2 = \bar{z}$ 에서$(a+bi)^2 = a - bi$

$\therefore a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$

$a^2 - b^2 = a, 2ab = -b$

$\therefore b = 0$ 또는 $a = -\frac{1}{2}$

i) $b = 0$ 일 때 : $a^2 = a \therefore a = 0$ 또는 $a = 1$

ii) $a = -\frac{1}{2}$일때 : $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ $\therefore b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore\ z = 0,\ 1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

따라서 모든 z의 합은 0이다.

25. 연립방정식 $\begin{cases} xy+x+y=-5 & \cdots\cdots ① \\ x^2+xy+y^2=7 & \cdots\cdots ② \end{cases}$ 을 만족하는 x, y에 대해 $x+y$의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$ 의 값을 구하면?

① 0 ② 1 ③ -1 ④ 2 ⑤ -2

해설

$x+y=u,\ xy=v$ 로 놓으면

①은 $u+v=-5$ $\cdots\cdots$ ③

②는 $u^2-v=7$ $\cdots\cdots$ ④

③, ④에서 v 를 소거하면

$u^2+u-2=0$

$\therefore\ (u-1)(u+2)=0$

$u=1$ 일 때, $v=-6$ 이므로

$t^2-t-6=0$ 에서 $t=-2,\ 3$

$u=-2$ 일 때, $v=-3$ 이므로

$t^2+2t-3=0$ 에서 $t=1,\ -3$

따라서, 구하는 근은

$\begin{cases} x=-2 \\ y=3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=3 \\ y=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x=1 \\ y=-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x=-3 \\ y=1 \end{cases}$

$\therefore\ M=1,\ \ m=-2\ \ \therefore\ M+m=-1$