1. 서로 다른 세 실수 x, y, z에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 x, y, z 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

2. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$ 인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형
② $a=c$인 이등변 삼각형
③ 정삼각형
④ a가 빗변인 직각 삼각형
⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$
$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$
$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$
$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$
$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

3. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a = b$ 인 이등변삼각형
② $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형
③ $b = c$ 인 이등변삼각형
④ $\angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형
⑤ 정삼각형

해설

$a^3 + a^2b - ac^2 + ab^2 + b^3 - bc^2 = 0$
$a^2(a + b) + b^2(a + b) - c^2(a + b) = 0$
$(a + b)(a^2 + b^2 - c^2) = 0$
$a = -b$ 또는 $c^2 = a^2 + b^2$
a, b, c 모두 양수이므로, $c^2 = a^2 + b^2$
$\therefore \angle C = 90^\circ$ 인 직각삼각형

4. $x^4 + 2x^2 + 9 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$로 인수분해될 때, $|ab - cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

(준식) $= (x^2 + 3)^2 - (2x)^2$

$= (x^2 + 2x + 3)(x^2 - 2x + 3)$

여기서 계수를 비교하면

$a = 2,\ b = 3,\ c = -2,\ d = 3$

$\therefore |ab - cd| = |2 \times 3 - (-2) \times 3| = 12$

5. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$