1. 서로 다른 세 실수 $x,\ y,\ z$에 대하여 $x^3+y^3+z^3=3xyz$ 를 만족할 때, $x+y+z$ 의 값은?

① 0　　② 1　　③ 2　　④ 3　　⑤ 4

해설

$x^3+y^3+z^3-3xyz$

$=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=0$

$(x+y+z)=0$ 또는 $x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx=0$

$\therefore\ x+y+z=0$ 또는 $\frac{1}{2}\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\}=0$

그런데 $x,\ y,\ z$ 가 서로 다른 세 실수$(x\neq y\neq z)$ 이므로

$x+y+z=0$

2. a, b, c가 삼각형의 세변의 길이를 나타내고 $ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$인 관계가 성립할 때, 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$인 이등변 삼각형

② $a=c$인 이등변 삼각형

③ 정삼각형

④ a가 빗변인 직각 삼각형

⑤ b가 빗변인 직각 삼각형

해설

$ab(a+b)=bc(b+c)+ca(c-a)$

$a^2b+ab^2-bc(b+c)-ac^2+a^2c=0$

$(b+c)a^2+(b^2-c^2)a-bc(b+c)=0$

$(b+c)\left\{a^2+(b-c)a-bc\right\}$

$=(b+c)(a+b)(a-c)=0$

3. 삼각형의 세 변의 길이 a, b, c 사이에 $a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$ 의 관계가 성립한다면 이 삼각형은 어떤 삼각형인가?

① $a=b$ 인 이등변삼각형

② $\angle A=90°$ 인 직각삼각형

③ $b=c$ 인 이등변삼각형

④ $\angle C=90°$ 인 직각삼각형

⑤ 정삼각형

해설

$a^3+a^2b-ac^2+ab^2+b^3-bc^2=0$

$a^2(a+b)+b^2(a+b)-c^2(a+b)=0$

$(a+b)(a^2+b^2-c^2)=0$

$a=-b$ 또는 $c^2=a^2+b^2$

a, b, c 모두 양수이므로, $c^2=a^2+b^2$

$\therefore\ \angle C=90°$ 인 직각삼각형

4. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (x^2+3)^2-(2x)^2\\ &= (x^2+2x+3)(x^2-2x+3)\end{aligned}$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times3-(-2)\times3|=12$

5. $(a+1)(a^2-a+1)=a^3+1$을 이용하여 $\dfrac{1999^3+1}{1998\times1999+1}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2000

해설

$a=1999$라 하면

$1998\times1999+1=(a-1)a+1=a^2-a+1$

$$\therefore \frac{1999^3+1}{1998\times1999+1}=\frac{a^3+1}{a^2-a+1}$$
$$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)}{a^2-a+1}$$
$$=a+1=2000$$