1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4)+g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$
$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$
$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

2. 함수 $y = |x+1| - |x-3|$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x+1| - |x-3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$y = -(x+1) + x - 3 = -4$

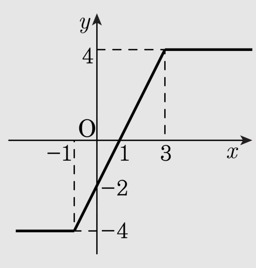
ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$

iii) $x \geq 3$ 일 때

$y = x + 1 - (x-3) = 4$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로



$M = 4, m = -4$

$\therefore M - m = 4 - (-4)$

$= 8$

3. 분수식 $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\dfrac{1}{x}$

해설

(준 식) $= 1-\dfrac{1}{\dfrac{-x}{1-x}} = 1+\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{1}{x}$

4. 유리수 a, b가 등식 $(a+\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$를 만족시킬 때, ab의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$

무리수의 상등에 의하여

유리수 부분 : $(a^2+2) = 6$, $a^2 = 4$

무리수 부분 : $2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$, $2a = b$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4,\ ab = 8 \\ a = -2, b = -4,\ ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$\therefore ab = 8$

5. $1 \le x \le 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$x = 1$ 일 때, 최댓값 $a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$

$x = 5$ 일 때, 최솟값 $b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$

$\therefore\ a - b = 2 - 0 = 2$

6. 두 함수 f, g가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x-7) = f(x+2)$로 정의될 때, $g(-1)$의 값은 얼마인가?

① 2　② 3　③ 4　④ 5　⑤ 6

해설

$g(3x-7) = f(x+2)$에 $x = 2$를 대입하면
$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$

7. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 0

해설

$f \circ g = g \circ f$ 에서 $x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$

즉 $2kx + k^2 - k = 0$

모든 x에 대하여 성립하므로 $k = 0$

8. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$

$f^{-1}(8) = a$ 라 놓으면 $f(a) = 2a + 2 = 8$

$\therefore \; a = f^{-1}(8) = 3$

9. 유리함수 $y=\frac{4x+3}{x+2}$의 그래프는 함수 $y=\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$y=\frac{4x+3}{x+2}=\frac{4(x+2)-5}{x+2}=4+\frac{-5}{x+2}$이므로

$y=\frac{-5}{x}$의 그래프를 x축 방향으로 -2,

y축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$a+b+c=(-5)+(-2)+4=-3$

10. $\sqrt{12-6\sqrt{3}}$의 정수 부분을 a, 소수 부분을 b라고 할 때, $\dfrac{6}{a+b}+b$의 값은?

① 0　　② $\dfrac{2}{3}$　　③ 2　　④ 3　　⑤ 5

해설

$\sqrt{12-6\sqrt{3}} = \sqrt{12-2\sqrt{27}} = 3-\sqrt{3}$

$a=1,\quad b=2-\sqrt{3}\quad (\because\ 1<\sqrt{3}<2)$

$\therefore \dfrac{6}{a+b}+b = \dfrac{6}{3-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3} = 5$

11. $x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$ ④ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ ⑤ $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$x=\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{6+2\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

$y=\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}}=\sqrt{\dfrac{6-2\sqrt{5}}{4}}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

$\therefore x+y=\sqrt{5},\ x-y=1$

$\therefore \dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\dfrac{\sqrt{5}}{1}=\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$

12. 분수함수 $y=\dfrac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x=-2$, $y=3$ 일 때, 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

① $\{x \mid x \le -3\}$
② $\left\{x \mid x \le -\dfrac{2}{3}\right\}$
③ $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$
④ $\left\{x \mid x \ge \dfrac{2}{3}\right\}$
⑤ $\{x \mid x \ge 3\}$

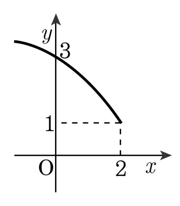
해설

$y=\dfrac{-ab-1}{x+b}+a$ 이므로

점근선은 $x=-b$, $y=a \therefore a=3, b=2$

$y=\sqrt{3x+2}$ 의 정의역은 $\left\{x \mid x \ge -\dfrac{2}{3}\right\}$ 이다.

13. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$의 값은?



① -1　　② 0　　③ 1

④ 2　　⑤ 3

해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$의 그래프를

x축 방향으로 2, y축 방향으로 1만큼 평행이동한

것이므로 $y-1 = \sqrt{a(x-2)}$

즉 $y = \sqrt{a(x-2)} + 1$

그런데 이 그래프가 점 $(0,3)$을 지나므로

$3 = \sqrt{-2a} + 1$

$\sqrt{-2a} = 2,\ -2a = 4$

$\therefore a = -2$

$\therefore y = \sqrt{-2x+4} + 1$

$\therefore a+b+c = (-2)+4+1 = 3$

14. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x)=a\,|\,x-1\,|+(2-a)x+a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<-1$ ② $-1<a<1$ ③ $0<a<1$

④ $a<1$ ⑤ $a<-1,\ a>1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
$x\geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
$x<1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.
$\therefore\ -2(a-1)>0$
$\therefore\ a<1$

15. 함수 $f_n(x)$가 $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$으로 정의될 때, $f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① $\frac{1}{20}$ ② $\frac{1}{24}$ ③ $\frac{1}{30}$ ④ $\frac{1}{32}$ ⑤ $\frac{1}{40}$

해설

$f_1(x) = \frac{x}{x+1}$ 이고

$f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ 이므로

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{2x+1}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{3x+1}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

$$f_{28}(x) = \frac{x}{28x+1}$$

$$\therefore\ f_{28}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{15} = \frac{1}{30}$$

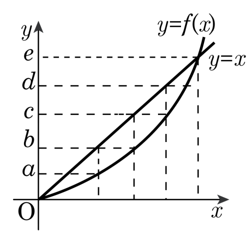
16. 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수 f를 $f: x \to a|x-1|+(2-a)x+a$ 와 같이 정의한다. 함수 f의 역함수가 존재할 때, 상수 a의 값의 범위를 구하면?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $0<a<2$
④ $-\frac{1}{2}<a<2$ ⑤ $0<a<\frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.
$f(x)=a|x-1|+(2-a)x+a$
$$=\begin{cases}2x & (x\ge 1)\\(2-2a)x+2a & (x<1)\end{cases}$$
가 일대일대응이려면 $x\ge 1$에서 증가함수이므로 $x<1$에서도 증가함수 이어야 한다.
즉, $2-2a>0$에서 $a<1$

17. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$와 $y = x$의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$의 값은?



① a ② b ③ c ④ d ⑤ e

해설

$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$

$f^{-1}(b) = k$라고 하면, $f(k) = b$

$\therefore\ k = c \qquad \therefore\ f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$

또, $f^{-1}(c) = t$라고 하면, $f(t) = c$

$\therefore\ t = d \qquad \therefore\ (f \circ f)^{-1}(b) = d$

18. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{a}{100}$, $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}=\frac{b}{101}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$

$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+$

$\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}$

$=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}$

$\therefore\ a=99$

$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+$

$\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}$

$\therefore\ b=50$

$\therefore\ a+b=149$

19. $\frac{2}{x}-z=1$, $y-\frac{1}{z}=1$일 때, xyz의 값은?

① -2 ② -1 ③ 4 ④ 3 ⑤ 2

해설

$\frac{2}{x}-z=1 \Rightarrow x=\frac{2}{z+1}$

$y-\frac{1}{z}=1 \Rightarrow y=\frac{z+1}{z}$

$\therefore xyz=\frac{2}{z+1}\times\frac{z+1}{z}\times z=2$

20. 두 지점 A, B를 왕복하는데 A에서 B까지 갈 때에는 시속 a km의 속력으로, B에서 A로 올 때에는 시속 b km의 속력으로 다녀왔다. 다음 중 왕복 평균속력을 나타내는 식을 적은 것은? (단위: km/h)

① $\dfrac{a+b}{2}$　② $\sqrt{ab}$　③ $\dfrac{2ab}{a+b}$
④ $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$　⑤ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$

해설

A에서 B까지의 거리를 l km라 하면

가는데 걸린 시간 : $\dfrac{l}{a}$

오는데 걸린 시간 : $\dfrac{l}{b}$

왕복거리 : $2l$

따라서, 왕복평균속력은 $\dfrac{2l}{\dfrac{l}{a}+\dfrac{l}{b}}=\dfrac{2ab}{a+b}$

21. $2 \le x \le 4$ 일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$ 의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{8}{3}$　④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

$y = \dfrac{3x-4}{x-1} = \dfrac{-1}{x-1} + 3$

$x = 2$ 일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$ 일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$\therefore \ Mm = 2 \times \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

22. 함수 $f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3　　② 4　　③ 5　　④ 6　　⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$y = f^{-1}(x) = \dfrac{2x-4}{-x+3}$ 를

x에 대하여 풀면, $x = \dfrac{3y+4}{y+2}$

x와 y를 바꾸면, $y = f(x) = \dfrac{3x+4}{x+2}$

$f(x) = \dfrac{ax+b}{x+c}$ 이므로 $a = 3,\ b = 4,\ c = 2$

함수 $y = |x+3|+6$은 $x = -3$일 때, 최솟값 6을 갖는다.

23. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$를 $f(x)$로 나타내면?

① $\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$ ② $\dfrac{3f(x)}{2f(x)+1}$ ③ $\dfrac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\dfrac{3f(x)}{2f(x)-1}$ ⑤ $\dfrac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ 에서 $x=\dfrac{f(x)}{f(x)-1}$

$$\therefore f(3x)=\frac{3x}{3x-1}=\frac{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}}{3\dfrac{f(x)}{f(x)-1}-1}$$

$$=\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

24. 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ 가 있다. $(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은 ?

① $\sqrt{2}$　　② 2　　③ $2\sqrt{2}$　　④ 4　　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$g(x) = \sqrt{x} = y$ 의 역함수는 $x = \sqrt{y}$
$\therefore g^{-1}(x) = x^2 \ (x > 0)$
$(f \circ g^{-1})(a) = f(a^2)$
$\qquad = a^4 - 2a^2 = -1$
$(a^2 - 1)^2 = 0$
$\therefore a = 1 \leftarrow$ 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$
$(g \circ f)(4a) = g(f(4)) = g(8) = 2\sqrt{2}$

해설

$(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 에서 $g^{-1}(a) = k$ 라 하면
$f(k) = k^2 - 2k = -1$, $(k-1)^2 = 0$, $k = 1$ 이므로
$g^{-1}(a) = 1 \Leftrightarrow g(1) = a$
$g(1) = \sqrt{1} = a$
$\therefore (g \circ f)(4a) = g(f(4a)) = g(f(4))$
$\qquad = g(4^2 - 2 \times 4) = g(8) = \sqrt{8}$

25. 방정식 $|x|+|y|=2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나누어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{7}{5}$ ⑤ 3

해설

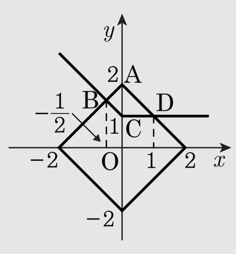
$y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 에서

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x|=x$ 이므로

$y=\frac{1}{2}(x-x)+1=1$

(ii) $x<0$ 일 때, $|x|=-x$ 이므로

$y=\frac{1}{2}(-x-x)+1=-x+1$



따라서 $y=\frac{1}{2}(|x|-x)+1$ 과 $|x|+|y|=2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{3}{4}$

26. $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$에 대하여 $y=f(x)$의 그래프의 점근선이 $x=a$, $y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b=-1$

해설

$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2x-1}{x+1}\cdots$ ①에서

x대신 $\frac{1}{x}$을 대입하면

$f\left(\frac{1}{x}\right)-2f(x)=\frac{-x+2}{x+1}\cdots$ ②

① $+2\times$② $\Rightarrow -f(x)=\frac{1}{x+1}$

$\therefore f(x)=-\frac{1}{x+1}$

점근선 $x=-1$, $y=0$

$\therefore a+b=-1$

27. $x^2+6x+4=0$ 의 두 근이 a, b 일 때, $\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 의 값은?

① -3 ② $-\dfrac{3}{2}$ ③ -1 ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ 3

해설

$x^2+6x+4=0$

$a+b=-6,\ ab=4 \Rightarrow a<0,\ b<0$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}}+\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{(\sqrt{b})^2+(\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}}=\frac{b+a}{-\sqrt{ab}}$$

$\therefore\ \dfrac{-6}{-2}=3$

28. 두 실수 $a,\ b$에 대하여 $a+b=\sqrt{7\sqrt{5}-\sqrt{3}}$, $a-b=\sqrt{7\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ 가 성립할 때, a^2+ab+b^2 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5}+\sqrt{3}$　　② $5\sqrt{5}+\sqrt{3}$　　③ $5\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5}+3\sqrt{3}$　　⑤ $\sqrt{5}+2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2+b^2 &= \frac{1}{2}\{(a+b)^2+(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{2}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}+7\sqrt{3}-\sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5}+3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4}\{(a+b)^2-(a-b)^2\} \\ &= \frac{1}{4}(7\sqrt{5}-\sqrt{3}-7\sqrt{3}+\sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5}-2\sqrt{3} \end{aligned}$$

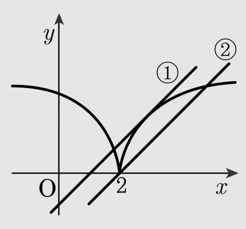
$\therefore\ a^2+ab+b^2=5\sqrt{5}+\sqrt{3}$

29. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$ ② $-2 < k \le -\frac{7}{4}$ ③ $-2 \le k < -\frac{7}{4}$
④ $-2 \le k \le -\frac{7}{4}$ ⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$ 의 개형은



와 같고

$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$x + k = \sqrt{x-2}$에서

$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$

$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$

$\therefore\ k = -\frac{7}{4}$

② $y = x + k$ 가 $(2, 0)$ 을 지날 때

$0 = 2 + k$

$k = -2$

$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$

30. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$에 x축 위의 점 $(a,\ 0)$으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a의 값을 정하면?

① -1　② 0　③ 1　④ 2　⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,
그 접선은 점$(a,\ 0)$ 을 지나므로 $y = m(x-a)$
이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,
$(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$
$m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$
$\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$
정리하면, $(1-a)m^2 - m + 1 = 0$
m의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면,
두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$이어야 하므로
$\alpha\beta = \frac{1}{1-a} = -1$
$\therefore a = 2$