

1. 실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 f, g 에 대하여 $f(x)$ 는 항등함수이고, $g(x) = -2$ 인 상수함수일 때, $f(4) + g(-1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$f(x)$ 는 항등함수이므로 $f(x) = x$ 에서 $f(4) = 4$

$g(x) = -2$ 에서 $g(-1) = -2$

$\therefore f(4) + g(-1) = 4 - 2 = 2$

2. 함수 $y = |x + 1| - |x - 3|$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$y = |x + 1| - |x - 3|$ 에서

i) $x < -1$ 일 때

$$y = -(x + 1) + x - 3 = -4$$

ii) $-1 \leq x < 3$ 일 때

$$y = x + 1 + x - 3 = 2x - 2$$

iii) $x \geq 3$ 일 때

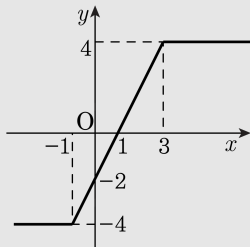
$$y = x + 1 - (x - 3) = 4$$

이상에서 주어진 함수의 그래프가 다음 그림과 같으므로

$$M = 4, m = -4$$

$$\therefore M - m = 4 - (-4)$$

$$= 8$$



3. 분수식 $1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{1-x}}$ 을 간단히 하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{1}{x}$

해설

$$(\text{준 식}) = 1 - \frac{1}{\frac{-x}{1-x}} = 1 + \frac{1-x}{x} = \frac{1}{x}$$

4. 유리수 a, b 가 등식 $(a + \sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$ 를 만족시킬 때, ab 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$a^2 + 2\sqrt{2}a + (\sqrt{2})^2 = 6 + b\sqrt{2}$$

무리수의 상등에 의하여

$$\text{유리수 부분 : } (a^2 + 2) = 6, a^2 = 4$$

$$\text{무리수 부분 : } 2a\sqrt{2} = b\sqrt{2}, 2a = b$$

$$\begin{cases} a = 2, b = 4, ab = 8 \\ a = -2, b = -4, ab = (-2)(-4) = 8 \end{cases}$$

$$\therefore ab = 8$$

5. $1 \leq x \leq 5$ 에서 함수 $y = -\sqrt{3x+1} + 4$ 의 최댓값을 a , 최솟값을 b 라 할 때, $a - b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = -\sqrt{3x+1} + 4 = -\sqrt{3\left(x + \frac{1}{3}\right)} + 4$$

주어진 함수의 그래프는 $y = -\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-\frac{1}{3}$ 만큼, y 축의 방향으로 4 만큼 평행이동한 것이므로 x 의 값이 증가할 때, y 의 값은 감소한다.

$$x = 1 \text{ 일 때, 최댓값 } a = -\sqrt{3+1} + 4 = 2$$

$$x = 5 \text{ 일 때, 최솟값 } b = -\sqrt{15+1} + 4 = 0$$

$$\therefore a - b = 2 - 0 = 2$$

6. 두 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 - 3x - 2$, $g(3x - 7) = f(x + 2)$ 로 정의될 때, $g(-1)$ 의 값은 얼마인가?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$g(3x - 7) = f(x + 2)$ 에 $x = 2$ 를 대입하면

$$g(-1) = f(4) = 4^2 - 3 \times 4 - 2 = 16 - 12 - 2 = 2$$

7. 두 함수 $f(x) = x + k$, $g(x) = x^2 + 1$ 에 대하여 $f \circ g = g \circ f$ 가 성립하도록 상수 k 의 값을 정하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

$$f \circ g = g \circ f \text{ 에서 } x^2 + 1 + k = x^2 + 2kx + k^2 + 1$$

$$\text{즉 } 2kx + k^2 - k = 0$$

모든 x 에 대하여 성립하므로 $k = 0$

8. 두 다항함수 $f(x) = 2x + 2$, $g(x) = x^2 - 1$ 에 대하여 $(f^{-1} \circ g)(3)$ 의 값을 구하시오. (단, f^{-1} 는 f 의 역함수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$(f^{-1} \circ g)(3) = f^{-1}(g(3)) = f^{-1}(8)$$

$$f^{-1}(8) = a \text{라 놓으면 } f(a) = 2a + 2 = 8$$

$$\therefore a = f^{-1}(8) = 3$$

9. 유리함수 $y = \frac{4x+3}{x+2}$ 의 그래프는 함수 $y = \frac{a}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 b 만큼, y 축의 방향으로 c 만큼 평행 이동한 것이다. 이 때 $a+b+c$ 의 값은?

① -4

② -3

③ -2

④ -1

⑤ 0

해설

$$y = \frac{4x+3}{x+2} = \frac{4(x+2)-5}{x+2} = 4 + \frac{-5}{x+2} \text{ 이므로}$$

$$y = \frac{-5}{x} \text{ 의 그래프를 } x\text{축 방향으로 } -2,$$

y 축 방향으로 4만큼 평행이동한 것이므로

$$a+b+c = (-5) + (-2) + 4 = -3$$

10. $\sqrt{12 - 6\sqrt{3}}$ 의 정수 부분을 a , 소수 부분을 b 라고 할 때, $\frac{6}{a+b} + b$ 의 값은?

- ① 0 ② $\frac{2}{3}$ ③ 2 ④ 3 ⑤ 5

해설

$$\sqrt{12 - 6\sqrt{3}} = \sqrt{12 - 2\sqrt{27}} = 3 - \sqrt{3}$$

$$a = 1, \quad b = 2 - \sqrt{3} \quad (\because 1 < \sqrt{3} < 2)$$

$$\therefore \frac{6}{a+b} + b = \frac{6}{3 - \sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 5$$

11. $x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$, $y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 일 때, $\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

② $\sqrt{5}$

③ $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

④ $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

⑤ $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

해설

$$x = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6+2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

$$y = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{\frac{6-2\sqrt{5}}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\therefore x+y = \sqrt{5}, \quad x-y = 1$$

$$\therefore \frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5}}{1} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

12. 분수함수 $y = \frac{ax-1}{x+b}$ 의 점근선이 $x = -2$, $y = 3$ 일 때, 무리함수 $y = \sqrt{ax+b}$ 의 정의역은? (단, a, b 는 상수)

- ① $\{x \mid x \leq -3\}$ ② $\left\{x \mid x \leq -\frac{2}{3}\right\}$ ③ $\left\{x \mid x \geq -\frac{2}{3}\right\}$
④ $\left\{x \mid x \geq \frac{2}{3}\right\}$ ⑤ $\{x \mid x \geq 3\}$

해설

$$y = \frac{-ab-1}{x+b} + a \text{ 이므로}$$

$$\text{점근선은 } x = -b, y = a \therefore a = 3, b = 2$$

$$y = \sqrt{3x+2} \text{ 의 정의역은 } \left\{x \mid x \geq -\frac{2}{3}\right\} \text{ 이다.}$$

13. 무리함수 $y = \sqrt{ax+b} + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때 $a+b+c$ 의 값은?

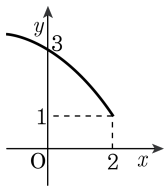
① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3



해설

주어진 그림은 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를

x 축 방향으로 2, y 축 방향으로 1만큼 평행이동한

것이므로 $y - 1 = \sqrt{a(x - 2)}$

$$\text{즉 } y = \sqrt{a(x - 2)} + 1$$

그런데 이 그래프가 점 $(0, 3)$ 을 지나므로

$$3 = \sqrt{-2a} + 1$$

$$\sqrt{-2a} = 2, \quad -2a = 4$$

$$\therefore a = -2$$

$$\therefore y = \sqrt{-2x + 4} + 1$$

$$\therefore a + b + c = (-2) + 4 + 1 = 3$$

14. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 $f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$ 가 일대일대응이 되기 위한 실수 a 의 값의 범위는?

① $a < -1$

② $-1 < a < 1$

③ $0 < a < 1$

④ $a < 1$

⑤ $a < -1, a > 1$

해설

$f(x)$ 가 일대일대응이 되기 위해서는
 $x \geq 1$ 에서 $f(x)$ 가 증가함수이므로
 $x < 1$ 에서도 $f(x)$ 는 증가함수이어야 한다.

$$\therefore -2(a-1) > 0$$

$$\therefore a < 1$$

15. 함수 $f_n(x)$ 가 $f_1(x) = \frac{x}{x+1}$, $f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)으로 정의될 때, $f_{28}\left(\frac{1}{2}\right)$ 의 값은?

① $\frac{1}{20}$

② $\frac{1}{24}$

③ $\frac{1}{30}$

④ $\frac{1}{32}$

⑤ $\frac{1}{40}$

해설

$$f_1(x) = \frac{x}{x+1} \text{ 이고}$$

$$f_{n+1}(x) = (f_1 \circ f_n)(x) \text{ 이므로}$$

$$f_2(x) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x+1+x}{x+1}} = \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1} + 1} = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{2x+1+x}{2x+1}} = \frac{x}{3x+1}$$

$\vdots$

$$f_{28}(x) = \frac{x}{28x+1}$$

$$\therefore f_{28}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{15} = \frac{1}{30}$$

16. 실수 전체의 집합 R 에서 R 로의 함수 f 를 $f : x \rightarrow a|x-1| + (2-a)x + a$ 와 같이 정의한다. 함수 f 의 역함수가 존재할 때, 상수 a 의 값의 범위를 구하면?

① $a < 1$

② $a > 1$

③ $0 < a < 2$

④ $-\frac{1}{2} < a < 2$

⑤ $0 < a < \frac{2}{3}$

해설

역함수가 존재하려면 일대일대응이어야 한다.

$$f(x) = a|x-1| + (2-a)x + a$$

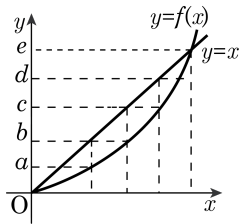
$$= \begin{cases} 2x & (x \geq 1) \\ (2-2a)x + 2a & (x < 1) \end{cases}$$

가 일대일대응으려면 $x \geq 1$ 에서 증가함수이므로 $x < 1$ 에서도 증가함수 이어야 한다.

즉, $2-2a > 0$ 에서 $a < 1$

17. 다음 그림은 두 함수 $y = f(x)$ 와 $y = x$ 의 그래프이다. $(f \circ f)^{-1}(b)$ 의 값은?

- ① a ② b ③ c ④ d ⑤ e



해설

$$(f \circ f)^{-1}(b) = (f^{-1} \circ f^{-1})(b) = f^{-1}(f^{-1}(b))$$

$$f^{-1}(b) = k \text{ 라고 하면, } f(k) = b$$

$$\therefore k = c \quad \therefore f^{-1}(f^{-1}(b)) = f^{-1}(c)$$

$$\text{또, } f^{-1}(c) = t \text{ 라고 하면, } f(t) = c$$

$$\therefore t = d \quad \therefore (f \circ f)^{-1}(b) = d$$

18. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} = \frac{a}{100}, \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} = \frac{b}{101}$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : 149

해설

$$\begin{aligned} & \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 100} \\ &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right) = 1 - \frac{1}{100} \\ &= \frac{99}{100} = \frac{a}{100} \\ \therefore a &= 99 \\ & \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \cdots + \frac{1}{99 \cdot 101} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{97} - \frac{1}{99} \right) + \\ & \quad \left(\frac{1}{99} - \frac{1}{101} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{101} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{101} = \frac{50}{101} = \frac{b}{101} \\ \therefore b &= 50 \\ \therefore a + b &= 149 \end{aligned}$$

19. $\frac{2}{x} - z = 1$, $y - \frac{1}{z} = 1$ 일 때, xyz 의 값은?

① -2

② -1

③ 4

④ 3

⑤ 2

해설

$$\frac{2}{x} - z = 1 \Rightarrow x = \frac{2}{z+1}$$

$$y - \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow y = \frac{z+1}{z}$$

$$\therefore xyz = \frac{2}{z+1} \times \frac{z+1}{z} \times z = 2$$

20. 두 지점 A, B를 왕복하는데 A에서 B까지 갈 때에는 시속 a km의 속력으로, B에서 A로 올 때에는 시속 b km의 속력으로 다녀왔다. 다음 중 왕복 평균속력을 나타내는 식을 적은 것은? (단위: km/h)

① $\frac{a+b}{2}$

② $\sqrt{ab}$

③ $\frac{2ab}{a+b}$

④ $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

⑤ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

해설

A에서 B까지의 거리를 l km라 하면

가는데 걸린 시간 : $\frac{l}{a}$

오는데 걸린 시간 : $\frac{l}{b}$

왕복거리 : $2l$

따라서, 왕복평균속력은 $\frac{2l}{\frac{l}{a} + \frac{l}{b}} = \frac{2ab}{a+b}$

21. $2 \leq x \leq 4$ 일 때, 함수 $y = \frac{3x-4}{x-1}$ 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 한다. Mm 의 값은?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{4}{3}$

③ $\frac{8}{3}$

④ $\frac{16}{3}$

⑤ $\frac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$$x = 2 \text{ 일 때 최소이므로, } M = \frac{-1}{2-1} + 3 = 2$$

$$x = 4 \text{ 일 때 최대이므로, } m = \frac{-1}{4-1} + 3 = \frac{8}{3}$$

$$\therefore Mm = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$

22. 함수 $f(x) = \frac{ax+b}{x+c}$ 의 역함수가 $f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3}$ 일 때, 함수 $y = |x+a|+b+c$ 의 최솟값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

f^{-1} 의 역함수가 f 이므로 $f(x) = (f^{-1})^{-1}(x)$

$$y = f^{-1}(x) = \frac{2x-4}{-x+3} \text{ 를}$$

$$x \text{에 대하여 풀면, } x = \frac{3y+4}{y+2}$$

$$x \text{와 } y \text{를 바꾸면, } y = f(x) = \frac{3x+4}{x+2}$$

$$f(x) = \frac{ax+b}{x+c} \text{ 이므로 } a=3, b=4, c=2$$

함수 $y = |x+3|+6$ 은 $x = -3$ 일 때, 최솟값 6을 갖는다.

23. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ 라 할 때, $f(3x)$ 를 $f(x)$ 로 나타내면?

① $\frac{f(x)}{f(x)-1}$

② $\frac{3f(x)}{2f(x)+1}$

③ $\frac{f(x)}{f(x)+1}$

④ $\frac{3f(x)}{2f(x)-1}$

⑤ $\frac{f(x)}{2f(x)-1}$

해설

$$f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ 에서 } x = \frac{f(x)}{f(x)-1}$$

$$\therefore f(3x) = \frac{3x}{3x-1} = \frac{3 \frac{f(x)}{f(x)-1}}{3 \frac{f(x)}{f(x)-1} - 1}$$

$$= \frac{3f(x)}{2f(x)+1}$$

24. 정의역이 $\{x \mid x > 0\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2 - 2x$, $g(x) = \sqrt{x}$ 가 있다.
 $(f \circ g^{-1})(a) = -1$ 일 때, $(g \circ f)(4a)$ 의 값은 ?

① $\sqrt{2}$

② 2

③ $2\sqrt{2}$

④ 4

⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$$g(x) = \sqrt{x} = y \text{ 의 역함수는 } x = \sqrt{y}$$

$$\therefore g^{-1}(x) = x^2 \ (x > 0)$$

$$\begin{aligned} (f \circ g^{-1})(a) &= f(a^2) \\ &= a^4 - 2a^2 = -1 \end{aligned}$$

$$(a^2 - 1)^2 = 0$$

$$\therefore a = 1 \leftarrow \text{정의역이 } \{x \mid x > 0\}$$

$$(g \circ f)(4a) = g(f(4)) = g(8) = 2\sqrt{2}$$

해설

$$(f \circ g^{-1})(a) = -1 \text{ 에서 } g^{-1}(a) = k \text{ 라 하면}$$

$$f(k) = k^2 - 2k = -1, (k-1)^2 = 0, k = 1 \text{ 이므로}$$

$$g^{-1}(a) = 1 \Leftrightarrow g(1) = a$$

$$g(1) = \sqrt{1} = a$$

$$\begin{aligned} \therefore (g \circ f)(4a) &= g(f(4a)) = g(f(4)) \\ &= g(4^2 - 2 \times 4) = g(8) = \sqrt{8} \end{aligned}$$

25. 방정식 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프로 둘러싸인 도형은 함수 $y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1$ 의 그래프에 의하여 두 부분으로 나뉘어진다. 이 때, 작은 부분의 넓이를 구하면?

① $\frac{2}{3}$

② $\frac{3}{4}$

③ 1

④ $\frac{7}{5}$

⑤ 3

해설

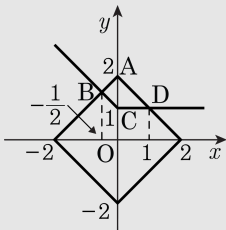
$$y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1 \text{ 에서}$$

(i) $x \geq 0$ 일 때, $|x| = x$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}(x - x) + 1 = 1$$

(ii) $x < 0$ 일 때, $|x| = -x$ 이므로

$$y = \frac{1}{2}(-x - x) + 1 = -x + 1$$



따라서 $y = \frac{1}{2}(|x| - x) + 1$ 과 $|x|+|y| = 2$ 의 그래프는 위의 그림과 같다.

그러므로 구하는 작은 사각형 ABCD 의 넓이는

$$\triangle ABC + \triangle ACD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

26. $f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1}$ 을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$ 의 그래프의 점근선이 $x = a, y = b$ 일 때, $a + b$ 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b = -1$

해설

$$f(x) - 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{2x-1}{x+1} \dots \textcircled{1} \text{에서}$$

x 대신 $\frac{1}{x}$ 을 대입하면

$$f\left(\frac{1}{x}\right) - 2f(x) = \frac{-x+2}{x+1} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + 2 \times \textcircled{2} \Rightarrow -f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\therefore f(x) = -\frac{1}{x+1}$$

점근선 $x = -1, y = 0$

$$\therefore a + b = -1$$

27. $x^2 + 6x + 4 = 0$ 의 두 근이 a, b 일 때, $\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ 의 값은?

① -3

② $-\frac{3}{2}$

③ -1

④ $\frac{3}{2}$

⑤ 3

해설

$$x^2 + 6x + 4 = 0$$

$$a + b = -6, ab = 4 \Rightarrow a < 0, b < 0$$

$$\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}} + \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{b})^2 + (\sqrt{a})^2}{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \frac{b + a}{-\sqrt{ab}}$$

$$\therefore \frac{-6}{-2} = 3$$

28. 두 실수 a, b 에 대하여 $a + b = \sqrt{7\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, $a - b = \sqrt{7\sqrt{3} - \sqrt{5}}$ 가 성립할 때, $a^2 + ab + b^2$ 의 값을 구하면?

① $3\sqrt{5} + \sqrt{3}$

② $5\sqrt{5} + \sqrt{3}$

③ $5\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

④ $2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}$

⑤ $\sqrt{5} + 2\sqrt{3}$

해설

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= \frac{1}{2} \{ (a+b)^2 + (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{2} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} + 7\sqrt{3} - \sqrt{5}) \\ &= 3\sqrt{5} + 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab &= \frac{1}{4} \{ (a+b)^2 - (a-b)^2 \} \\ &= \frac{1}{4} (7\sqrt{5} - \sqrt{3} - 7\sqrt{3} + \sqrt{5}) \\ &= 2\sqrt{5} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore a^2 + ab + b^2 = 5\sqrt{5} + \sqrt{3}$$

29. $y = \sqrt{|x-2|}$ 와 $y = x + k$ 가 서로 다른 세 점에서 만날 때의 k 값의 범위를 구하면?

① $-2 < k < -\frac{7}{4}$

② $-2 < k \leq -\frac{7}{4}$

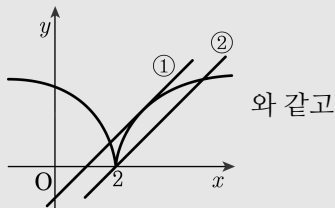
③ $-2 \leq k < -\frac{7}{4}$

④ $-2 \leq k \leq -\frac{7}{4}$

⑤ $k < -\frac{7}{4}$

해설

$y = \sqrt{|x-2|}$ 의 개형은



$y = x + k$ 가 그림의 ①, ② 사이에 있으면 된다.

① $y = \sqrt{x-2}$ 와 $y = x + k$ 가 접할 때,

$$x + k = \sqrt{x-2} \text{에서}$$

$$x^2 + (2k-1)x + k^2 + 2 = 0$$

$$D = (2k-1)^2 - 4k^2 - 8 = 0$$

$$\therefore k = -\frac{7}{4}$$

② $y = x + k$ 가 (2, 0) 을 지날 때

$$0 = 2 + k$$

$$k = -2$$

$$\therefore -2 < k < -\frac{7}{4}$$

30. 곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 x 축 위의 점 $(a, 0)$ 으로 부터 그은 두 접선이 직교하도록 a 의 값을 정하면?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

곡선 $y^2 - 2y + 4x - 3 = 0$ 에 접하는 직선의 기울기를 m 이라 하면,

그 접선은 점 $(a, 0)$ 을 지나므로 $y = m(x - a)$

이것을 주어진 식에 대입하여 정리하면,

$$(mx - am)^2 - 2(mx - am) + 4x - 3 = 0$$

$$m^2x^2 - 2(am^2 + m - 2)x + a^2m^2 + 2am - 3 = 0$$

$$\frac{D}{4} = (am^2 + m - 2)^2 - m^2(a^2m^2 + 2am - 3) = 0$$

정리하면, $(1 - a)m^2 - m + 1 = 0$

m 의 두 근을 α, β 라 하면,

두 접선이 직교하기 위해서는 $\alpha\beta = -1$ 이어야 하므로

$$\alpha\beta = \frac{1}{1 - a} = -1$$

$$\therefore a = 2$$