1. $f(x) = x^2 - ax + 1$이 $x - 1$로 나누어 떨어질 때 상수 a의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 2$

해설

$f(1) = 1^2 - a \cdot 1 + 1 = 0$

$\therefore \ a = 2$

2. 등식 $3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$ 이 x 에 관한 항등식일 때, 상수 b 의 값은?

① 3 ② -4 ③ 2 ④ 8 ⑤ 6

해설

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+c$

$=(x-1)\left\{a(x-1)+b\right\}+c$

$$
\begin{array}{c|ccc}
1 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 3 & 5 \\
\hline
1 & 3 & 5 & \boxed{6} \leftarrow \mathrm{c} \\
 & & 3 & \\
\hline
 & 3 & \boxed{8} \leftarrow \mathrm{c} & \\
 & \uparrow & & \\
 & \mathrm{a} & &
\end{array}
$$

해설

$x=1$ 을 대입하면 $c=6$

$3x^2+2x+1=a(x-1)^2+b(x-1)+6$

$\rightarrow 3x^2+2x-5=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow (x-1)(3x+5)=a(x-1)^2+b(x-1)$

$\rightarrow$ 양변을 $x-1$ 로 나누면

$3x+5=a(x-1)+b=ax-a+b$

$\therefore\ a=3,\ b=8$

※ 준식의 우변을 모두 전개해서 계수비교하여 구할 수도 있다.

3. 계수가 실수인 x에 대한 이차방정식 $x^2+2(a-m-1)x+a^2-b+m^2=0$의 근이 m의 값에 관계없이 항상 중근을 갖도록 하는 a, b값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$$\frac{D}{4}=(a-m-1)^2-(a^2-b+m^2)=0$$

m의 값에 관계없이

$2(-a+1)m+(-2a+b+1)=0$

이어야 하므로

$2(-a+1)=0,\ -2a+b+1=0$

$\therefore a=1,\ b=1$

$\therefore a+b=2$

4. 이차방정식 $x^2 + ax + b = 0$ 의 한 근이 $1 + 2i$ 일 때 실수 a, b 를 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = -2$

▷ 정답 : $b = 5$

해설

계수가 실수이므로 한 근이 $1+2i$ 이면 다른 한 근은 $1-2i$ 이다.

(두 근의 합) $= (1+2i) + (1-2i) = -a \quad \cdots\cdots$ ㉠

(두 근의 곱) $= (1+2i)(1-2i) = b \quad \cdots\cdots$ ㉡

$\therefore$ ㉠, ㉡에서

$a = -2,\ b = 5$ 이다.

5. x의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$y = -2(x-1)^2 + 3$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

6. 사차방정식 $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$의 근 중에서 최대의 근은?

① -2　② -1　③ 0　④ 6　⑤ 2

해설

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = 0$ 에서

$x = 1$, $x = -1$을 대입하면 성립하므로

$x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$

$= (x-1)(x+1)(x^2+x-6)$

$= (x-1)(x+1)(x+3)(x-2) = 0$

$\therefore\ x = -3,\ -1,\ 1,\ 2$

따라서 최대의 근은 2

7. 연립부등식 $5x-5 \leq 7x-1 < 10x+2$을 푼면?

① $x < -3$ ② $x > -3$ ③ $x < -1$

④ $x > -1$ ⑤ $x < 3$

해설

$5x-5 \leq 7x-1 < 10x+2$에서

$5x-5 \leq 7x-1$이고, $7x-1 < 10x+2$

$5x-5 \leq 7x-1,\ x \geq -2$

$7x-1 < 10x+2,\ x > -1$

$\therefore\ x > -1$

8. 이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립할 때 이를 만족하는 정수 a의 값이 아닌 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

이차부등식 $x^2+2ax+4a+5>0$
이 모든 실수 x에 대하여 항상 성립하므로

$$\frac{D}{4}=a^2-(4a+5)<0$$

$a^2-4a-5<0,\ (a-5)(a+1)<0$

$\therefore -1<a<5$

따라서 정수 a는 0, 1, 2, 3, 4이다.

9. $x+y+z=1$, $xy+yz+zx=2$, $xyz=3$일 때, $(x+1)(y+1)(z+1)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

$(x+1)(y+1)(z+1)$

$=xyz+xy+yz+zx+x+y+z+1$

$=7$

10. 세 실수 a, b, c 에 대하여 $a+b+c=2$, $a^2+b^2+c^2=6$, $abc=-1$ 일 때, $a^3+b^3+c^3$ 의 값은?

① 11 ② 12 ③ 13 ④ 14 ⑤ 15

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^3+2(ab+bc+ca)$

$ab+bc+ca=-1$

$a^3+b^3+c^3$

$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)+3abc$

$=2\times(6-(-1))-3=11$

11. $(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$ 를 인수분해하면 $(x+a)(x+b)(x^2+cx+d)$ 이다. $a+b+c-d$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 10

해설

$x^2+x=A$ 로 치환하면

$(x-3)(x-1)(x+2)(x+4)+24$

$=\{(x-1)(x+2)\}\{(x-3)(x+4)\}+24$

$=(x^2+x-2)(x^2+x-12)+24$

$=(A-2)(A-12)+24$

$=A^2-14A+48=(A-6)(A-8)$

$=(x^2+x-6)(x^2+x-8)$

$=(x-2)(x+3)(x^2+x-8)$

$\therefore\ a+b+c-d=-2+3+1-(-8)=10$

12. $x^4+2x^2+9=(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$로 인수분해될 때, $|ab-cd|$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$$(\text{준식})=(x^2+3)^2-(2x)^2$$
$$=(x^2+2x+3)(x^2-2x+3)$$

여기서 계수를 비교하면

$a=2,\ b=3,\ c=-2,\ d=3$

$\therefore |ab-cd|=|2\times3-(-2)\times3|=12$

13. 복소수 α, β 에 대하여 연산 $*$ 를 $\alpha * \beta = (\alpha+\beta)-\alpha\beta$ 라 하자. $z = \dfrac{5}{-2-i}$ 일 때, $z * \bar{z}$ 의 값은?

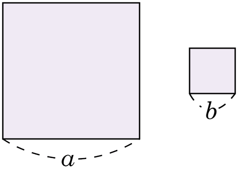
① -1　② 1　③ -9　④ 9　⑤ 0

해설

$z = -2+i$, $\bar{z} = -2-i$

$$
\begin{aligned}
z * \bar{z} &= (z+\bar{z}) - z\bar{z} \\
&= -4 - 5 \\
&= -9
\end{aligned}
$$

14. 길이가 16인 철사로 그림과 같이 한 변의 길이가 각각 a, b인 두 개의 정사각형을 만들었다. 이 두 정사각형의 넓이의 합이 10이다. 이 때, a, b를 두 근으로 하는 x에 대한 이차방정식을 구하면? (단, x^2의 계수는 1이다.)



① $x^2-4x+3=0$
② $x^2-3x+4=0$
③ $x^2+3x-4=0$
④ $x^2+4x+2=0$
⑤ $x^2-2x-2=0$

해설

두 정사각형의 둘레의 합이 16이므로
$4(a+b)=16$에서 $a+b=4$
두 정사각형의 넓이의 합이 10이므로
$a^2+b^2=10$,
$(a+b)^2-2ab=a^2+b^2=16-2ab=10$
따라서 $2ab=6$이고 $ab=3$
따라서 a, b를 근으로 하는 이차방정식의 두 근의 합이 4, 곱이 3이므로 $x^2-4x+3=0$

15. 실수 x 에 대하여 함수 $f(x) = \dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3}$ 의 함수값 중 가장 작은 정수를 m, 가장 큰 정수를 M 이라 할 때, $m + M$ 의 값은?

① 4 ② 5 ③ 6 ④ 8 ⑤ 9

해설

$\dfrac{2x^2 - 4x + 1}{x^2 + 2x + 3} = y$라 놓고,

양변에 $x^2 + 2x + 3$을 곱하면

$2x^2 - 4x + 1 = y(x^2 + 2x + 3)$

$(y - 2)x^2 + 2(y + 2)x + 3y - 1 = 0$

x가 실수이므로

이 이차방정식의 판별식을 D라 하면

$\dfrac{D}{4} = (y + 2)^2 - (y - 2)(3y - 1) \geq 0$

$2y^2 - 11y - 2 \leq 0$

$\therefore \dfrac{11 - \sqrt{137}}{4} \leq y \leq \dfrac{11 + \sqrt{137}}{4}$

$11 < \sqrt{137} < 12$이므로

$-0.\times\times\times \leq y \leq 5.\times\times\times$

따라서 $m = 0, M = 5$이므로 $m + M = 5$

16. 다음 중 연립부등식 $\begin{cases} 4x-3>3x-1 \\ x+5 \ge 2x-1 \\ -x<3 \end{cases}$ 의 해가 <u>아닌</u> 것은?

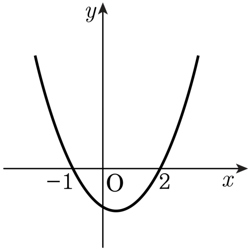
① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$$\begin{cases} 4x-3>3x-1 \\ x+5 \ge 2x-1 \\ -x<3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x>2 \\ x \le 6 \\ x>-3 \end{cases}$$

$\therefore\ 2<x\le 6$

17. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, x 에 대한 이차부등식 $cx^2 + bx + a > 0$ 의 해는?



① $-1 < x < \frac{1}{2}$

② $x < -1$ 또는 $x > \frac{1}{2}$

③ $x < -\frac{1}{2}$ 또는 $x > 1$

④ x는 모든 실수

⑤ 해가 없다.

해설

$y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 아래로 볼록이고
x 축과의 교점의 x 좌표가 $-1,\ 2$ 이므로
$a > 0$ 이고
$ax^2 + bx + c = a(x+1)(x-2) = ax^2 - ax - 2a$
$\therefore\ b = -a,\ c = -2a\ (a > 0)$

이때, $cx^2 + bx + a > 0 \Leftrightarrow -2ax^2 - ax + a > 0$
$\Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (x+1)(2x-1) < 0$

따라서, 구하는 부등식의 해는 $-1 < x < \frac{1}{2}$ 이다.

18. $198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$를 간단히 하면?

① 6800　② 7000　③ 7200　④ 7400　⑤ 7600

해설

$198 = x, 200 = y, 202 = z$라 하면

$198^3 + 200^3 + 202^3 - 3 \cdot 198 \cdot 200 \cdot 202$

$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$

$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$

$= \frac{1}{2} \times 600 \times 24$

$= 7200$

19. $f(x)=\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{98}$ 일 때, $f\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)+f\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)$의 값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** -2

해설

$\dfrac{1-i}{1+i}=-i,\ \dfrac{1+i}{1-i}=i$ 이므로

$f(\dfrac{1-i}{1+i})+f(\dfrac{1+i}{1-i})$

$=f(-i)+f(i)$

$=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{98}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{98}$

$=i^{98}+(-i)^{98}$

$=i^2+i^2$

$=-2$

20. $2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$ 이 두 일차식의 곱으로 인수분해될 때, 상수 m 의 값은?

① -3 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 3

해설

$2x^2 - 3xy + my^2 - 3x + y + 1$

$= 2x^2 - (3y + 3)x + my^2 + y + 1$

이 두 일차식의 곱으로 인수분해되므로

$D = (3y + 3)^2 - 8(my^2 + y + 1)$

$\quad = 9y^2 + 18y + 9 - 8my^2 - 8y - 8$

$\quad = (9 - 8m)y^2 + 10y + 1$

여기서 $D/4 = 25 - (9 - 8m) = 0$ 이어야 하므로

$25 - 9 + 8m = 0$

$8m = -16$

$\therefore m = -2$

21. 이차함수 $y=2x^2-8x+3a-4$ 의 최솟값은 -5보다 크고, 그 그래프가 점 $(2a,\ 8a+5)$를 지날 때, 상수 a 의 값은?

① -3 ② $-\frac{3}{8}$ ③ $\frac{3}{8}$ ④ 3 ⑤ 6

해설

$$\begin{aligned} y &= 2x^2-8x+3a-4 \\ &= 2(x^2-4x+4-4)+3a-4 \\ &= 2(x-2)^2-12+3a \end{aligned}$$

$y=2(x-2)^2-12+3a$ 의 그래프가 점 $(2a, 8a+5)$ 를 지나므로

$8a+5=2(2a-2)^2-12+3a$

$8a^2-21a-9=0,\ (8a+3)(a-3)=0$

$\therefore a=-\frac{3}{8}$ 또는 3

그런데 최댓값 $-12+3a>-5$ 이므로

$i)$ $a=-\frac{3}{8}$ 대입 :

$$-12+3\times\left(-\frac{3}{8}\right)=-12-\frac{9}{8}=-\frac{105}{8}<-5$$

$ii)$ $a=3$ 대입 : $-12+3\times3=-12+9=-3>-5$

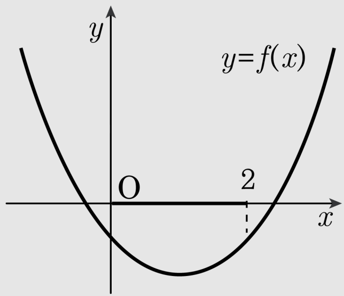
따라서 $a=3$ 이다.

22. $0 \le x \le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $x^2 - ax + a^2 - 4 \le 0$ 이 항상 성립되게 하는 실수 a 의 최댓값을 M , 최솟값을 m 이라 할 때, $M - m$ 의 값은?

① 4 ② 3 ③ 2 ④ 1 ⑤ -1

해설

$f(x) = x^2 - ax + a^2 - 4$ 로 놓을 때
주어진 부등식의 해가 0, 2 를 포함 하려면
$f(0) \le 0,\ f(2) \le 0$ 이어야 한다.



$f(0) = a^2 - 4 \le 0$

$\therefore\ -2 \le a \le 2 \cdots$ ㉠

$f(2) = -2a + a^2 \le 0$

$\therefore\ 0 \le a \le 2 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡의 공통 범위는 $0 \le a \le 2$

따라서 $M = 2,\ m = 0$ 이므로 $M - m = 2$

23. 실수가 아닌 복소수 z 가 $z^5 = 1$ 일 때,
$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)$ 의 값을 구하면?

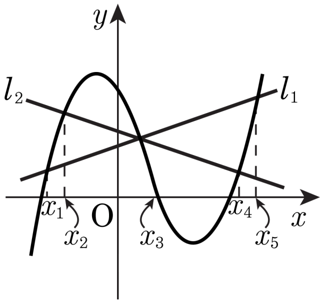
① 0　② 1　③ -1　④ 5　⑤ -5

해설

$z^5 = 1$ 이므로 $z^5 - 1 = 0$ 에서
$(z-1)(z^4+z^3+z^2+z+1) = 0$
$z \neq 1$ 이므로 $z^4+z^3+z^2+z+1 = 0$

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= (1-z)(1-z^4)(1-z^2)(1-z^3) \\ &= (2-z-z^4)(2-z^2-z^3) \\ &= 4-(z+z^2+z^3+z^4) \\ &= 5\end{aligned}$$

24. 삼차방정식 $y=f(x)$의 그래프가 두 직선 l_1, l_2와 아래의 그림과 같이 만나고 있다. 이들 교점의 x좌표를 차례로, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5라 할 때, x_1, x_2, x_4, x_5의 관계가 옳은 것은?



① $x_1+x_5=x_2+x_4$

② $x_1+x_4=x_2+x_5$

③ $x_1x_2=x_4x_5$

④ $x_1x_4=x_2x_5$

⑤ $x_1^2+x_2^2=x_4^2x_5^2$

해설

$y=ax^3+bx^2+cx+d\ (a\neq 0)\cdots f(x)$
$y=px+q\ (p\neq 0)\cdots l_1$
$y=rx+s\ (r\neq 0)\cdots l_2$로 놓으면
$ax^3+bx^2+cx+d=px+q\cdots(\text{i})$
$ax^3+bx^2+cx+d=rx+s\cdots(\text{ii})$
(i), (ii)에서 근과 계수의 관계를 이용하면

$x_1+x_3+x_5=-\dfrac{b}{a}$

$x_2+x_3+x_4=-\dfrac{b}{a}$이므로

$x_1+x_5=x_2+x_4$

25. 양의 유리수 a 에 대하여 $(n-1)^2 \le a \le n^2$ 을 만족하는 정수 n 을 $[a]$ 로 나타내기로 한다. 즉, $2^2 \le 6 \le 3^2$ 이면 $[6] = 3$ 이 된다. $[x] = 5$, $[y] = 9$ 일 때, $[y-x]$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : 7

▷ 정답 : 8

▷ 정답 : 9

해설

$[x] = 5$ 이므로 $4^2 \le x \le 5^2$ $\therefore\ 16 \le x \le 25$

$[y] = 9$ 이므로 $8^2 \le y \le 9^2$ $\therefore\ 64 \le y \le 81$

$y-x$ 의 범위를 구하면 $39 \le y-x \le 65$

즉, $6^2 \le y-x \le 9^2$ 이므로 $[y-x]$ 가 될 수 있는 값은 7, 8, 9 이다.