

1. 부등식 $\frac{x-a}{2} < 0.9x - 1.3 < 2.3$ 을 만족하는 정수가 4 개일 때, 정수 a 의 값을 구하여라.

① 3

② 2

③ 1

④ -1

⑤ -2

해설

$$0.9x - 1.3 < 2.3, x < 4$$

만족하는 정수는 3, 2, 1, 0 이다.

$$\frac{x-a}{2} < 0.9x - 1.3, x > \frac{13-5a}{4}$$

x 는 -1 보다 크거나 같고 0 보다 작아야 하므로 $\frac{13-5a}{4}$ 는 -1

이상 0 미만이다.

$$-1 \leq \frac{13-5a}{4} < 0$$

$$-4 \leq 13-5a < 0$$

$$13 < 5a \leq 17$$

$$\therefore a = 3$$

2. x 에 관한 이차부등식 $x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 모든 실수 x 에 대하여 성립하도록 상수 a 의 범위를 구하면 $p < a < q$ 이다. 이 때, pq 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: $pq = 12$

해설

$x^2 + ax + 2a - 3 > 0$ 이 항상 성립할 조건은
판별식 이 $D < 0$ 을 만족해야 한다.

$$D = a^2 - 4(2a - 3) < 0$$

$$a^2 - 8a + 12 < 0$$

$$(a - 6)(a - 2) < 0$$

$$2 < a < 6 \quad \therefore p = 2, q = 6$$

$$\therefore pq = 2 \times 6 = 12$$

3. $ax^2 + bx + 10 > 0$ 의 해가 $-2 < x < 5$ 가 되도록 하는 a, b 에 대하여 $a + b$ 의 값은?

① -1

② 0

③ 1

④ 2

⑤ 3

해설

$$-2 < x < 5 \Leftrightarrow (x+2)(x-5) < 0$$

$$x^2 - 3x - 10 < 0 \cdots \textcircled{1}$$

한편 $ax^2 + bx + 10 > 0$ 의 양변에 -1 을 곱하면,

$$-ax^2 - bx - 10 < 0 \cdots \textcircled{2}$$

①과 ②의 계수를 비교하면 $a = -1, b = 3$

$$\therefore a + b = -1 + 3 = 2$$

4. a 가 실수일 때 두 이차방정식 $x^2 + ax + a = 0$, $x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0$ 에서 한 방정식만이 허근을 가질 a 의 범위는 ?

- ① $-1 < a < 4$
 ② $-1 < a < 0$ 또는 $3 < a < 4$
 ③ $-1 \leq a \leq 4$
 ④ $-1 < a \leq 0$ 또는 $3 \leq a < 4$
 ⑤ $3 \leq x \leq 4$

해설

$$x^2 + ax + a = 0 \quad \cdots \textcircled{㉠}$$

$$x^2 - 2ax + 2a + 3 = 0 \quad \cdots \textcircled{㉡}$$

㉠에서 허근을 가지려면

$$D = a^2 - 4a < 0$$

$$\therefore 0 < a < 4$$

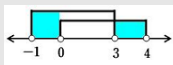
㉡에서 허근을 가지려면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 2a - 3 < 0$$

$$(a + 1)(a - 3) < 0$$

$$\therefore -1 < a < 3$$

한쪽만이 허근을 가지려면,



$$\therefore -1 < a \leq 0 \text{ 또는 } 3 \leq a < 4$$

5. 두 대의 승용차 A , B 가 같은 거리를 가는데 A 는 거리의 반은 시속 v km로 달리고, 나머지 거리는 시속 u km로 달린다고 한다, 또한 B 는 소요된 시간의 반은 시속 u km로 달리고 나머지 소요된 시간은 v km로 달린다고 한다. 승용차 A , B 의 평균 속력이 각각 x km/시, y km/시 일 때, x 와 y 의 대소 관계를 바르게 나타내 것은?

- ① $x \leq y$ ② $x \geq y$ ③ $x = y$ ④ $x < y$ ⑤ $x > y$

해설

승용차 A 가 달린 거리를 s ,

$$\text{시간을 } t \text{라 하면 } t = \frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}$$

평균 속력은

$$\frac{s}{t} = \frac{s}{\frac{s}{2u} + \frac{s}{2v}} = \frac{s}{\frac{su + sv}{2uv}} = \frac{2uv}{u + v} = x$$

$$\text{승용차 } B \text{의 평균 속력은 } \frac{1}{2}(u + v) = y$$

$$y - x = \frac{1}{2}(u + v) - \frac{2uv}{u + v}$$

$$= \frac{(u + v)^2 - 4uv}{2(u + v)} \geq 0$$

따라서 $y - x \geq 0$ 이므로 $x \leq y$ 이다.

6. 이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때, 실수 k 의 값의 범위를 구하면?

① $0 \leq k < 7$

② $-1 \leq k \leq 2$

③ $-5 \leq k \leq -2$

④ $-7 < k \leq -1$

⑤ $-7 < k \leq -3$

해설

이차방정식 $x^2 + 2kx + 6 - k = 0$ 의

두 근이 모두 1보다 크므로

$f(x) = x^2 + 2kx + 6 - k$ 로 놓으면

(i) $D \geq 0$ 이므로

$$k^2 + k - 6 \geq 0$$

$$(k + 3)(k - 2) \geq 0$$

$$\therefore k \leq -3, k \geq 2$$

(ii) $x^2 + 2kx + 6 - k = (x + k)^2 + 6 - k - k^2$ 에서

$$-k > 1$$

$$\therefore k < -1$$

(iii) $f(1) > 0$ 이므로

$$1 + 2k + 6 - k > 0$$

$$\therefore k > -7$$

따라서 (i), (ii), (iii) 에서

$$\therefore -7 < k \leq -3$$

7. $A : 0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. A 에서 B 를 제외한 수는?

- ① $x < 1$ ② $x \geq 1$ ③ $x < \frac{19}{16}$
 ④ $x \leq \frac{19}{16}$ ⑤ $x \geq \frac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$ 의 양변에 100을 곱하면

$$40 - 25x \leq 150x - 135$$

$$175 \leq 175x$$

$$1 \leq x$$

$$A : 1 \leq x$$

$$-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3} \text{의 양변에 12를 곱하면}$$

$$-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$$

$$-3 + 6x < 12 - 6x - 4x + 4$$

$$x < \frac{19}{16}$$

$$B : x < \frac{19}{16} \text{이므로}$$

A 에서 B 를 제외한 수는 $x \geq \frac{19}{16}$ 이다.

8. 다음 조건을 동시에 만족하는 x 의 범위는?

$$(가) \ 2x - y = -5$$

$$(나) \ -x < 2y < 3(x + 6)$$

$$① \ x > 8$$

$$② \ x < -2$$

$$③ \ -8 < x < -2$$

$$④ \ -2 < x < 8$$

$$⑤ \ -8 < x < 2$$

해설

$2x - y = -5 \Rightarrow y = 2x + 5$ 를 부등식에 대입하면,
 $-x < 2(2x + 5) < 3(x + 6)$

$$\begin{cases} -x < 2(2x + 5) \\ 2(2x + 5) < 3(x + 6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x < 4x + 10 \\ 4x + 10 < 3x + 18 \end{cases}$$

정리하면 $\begin{cases} x > -2 \\ x < 8 \end{cases}$ 이므로 $-2 < x < 8$ 이다.

9. 연립부등식 $\begin{cases} x-5 \leq 3x+3 \\ \frac{-x+a}{3} \geq x \end{cases}$ 의 해가 $x=m$ 일때, $\frac{a}{m}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$$\begin{cases} x-5 \leq 3x+3 \\ \frac{-x+a}{3} \geq x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2x \leq 8 \\ -x+a \geq 3x \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq -4 \\ x \leq \frac{a}{4} \end{cases}$$

해가 $x=m$ 이므로 $m = -4$ 이다.

$$\frac{a}{4} = -4, a = -16$$

$$\therefore \frac{a}{m} = \frac{-16}{-4} = 4$$

10. 연속하는 세 정수의 합이 30 보다 크고 36 보다 작을 때, 세 정수 중 가운데 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

연속한 세 정수 $x-1, x, x+1$

$$30 < (x-1) + x + (x+1) < 36$$

$$30 < 3x < 36$$

$$10 < x < 12$$

$$\therefore x = 11$$

11. 12%의 설탕물 300g이 있을 때, 물 x g을 증발시켜 15% 이상 20% 이하의 설탕물을 만들려고 한다. x 의 값으로 옳지 않은 것은?

① 60

② 80

③ 100

④ 120

⑤ 130

해설

12%의 소금물 300g의 소금의 양은 $\frac{12}{100} \times 300 = 36$ (g)이다.

따라서 물 x g을 뺏을 때의 농도를 나타내면 $\frac{36}{300-x} \times 100$ 이다.

이 값이 15% 이상 20% 이하이므로, $15 \leq \frac{36}{300-x} \times 100 \leq 20$

이고,

이를 연립 방정식으로 나타내면 $\begin{cases} 15 \leq \frac{36}{300-x} \times 100 \\ \frac{36}{300-x} \times 100 \leq 20 \end{cases}$ 이다.

간단히 나타내면 $\begin{cases} x \geq 60 \\ x \leq 120 \end{cases}$ 이다.

따라서 빼줘야 하는 물의 양 x 의 범위는 $60 \leq x \leq 120$ 이다.

12. 제주시에서 남서쪽 1100 km 해상에 태풍의 중심이 있다. 이 태풍은 중심에서 반지름 50 km 이내가 폭풍우권이며, 30 km/h의 속도로 북동진한다. 지름도 10 km/h씩 넓어진다. 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은? (단, 제주시는 점으로 생각하고, 태풍은 직진한다고 가정한다.)

① 15시간

② 16시간

③ 30시간

④ 46시간

⑤ 50시간

해설

$$|-1100 + 30x - 0| \leq 50 + 5x$$

$$-50 - 5x \leq -1100 + 30x \leq 50 + 5x$$

$$25x \leq 1150 \text{에서 } x \leq 46$$

$$35x \geq 1050 \text{에서 } x \geq 30$$

$$\therefore 30 \leq x \leq 46$$

따라서, 제주시가 폭풍우권 내에 들어있는 시간은 $46 - 30 = 16$ (시간)이다.

13. 부등식 $|x^2 - 1| + 3x < 3$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 상수 $\alpha + \beta$ 의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

절댓값 기호 안을 0으로 하는 x 의 값을 경계로 하여 구간을 나누어 본다.

$$(i) \ x^2 - 1 \geq 0,$$

즉 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 일 때,

$$|x^2 - 1| = x^2 - 1 \text{ 이므로 주어진 부등식은}$$

$$x^2 - 1 + 3x < 3, \ x^2 + 3x - 4 < 0$$

$$(x + 4)(x - 1) < 0$$

$$\therefore -4 < x < 1$$

이 때 조건에서 $x \leq -1$ 또는 $x \geq 1$ 이므로

이를 만족하는 x 값의 범위는 $-4 \leq x \leq -1$

$$(ii) \ x^2 - 1 < 0,$$

즉 $-1 < x < 1$ 일 때,

$$|x^2 - 1| = -x^2 + 1 \text{ 이므로 주어진 부등식은}$$

$$-x^2 + 1 + 3x < 3, \ x^2 - 3x + 2 > 0$$

$$(x - 1)(x - 2) > 0$$

$$\therefore x < 1 \text{ 또는 } x > 2$$

이 때 조건에서 $-1 < x < 1$ 이므로

이를 만족하는 x 의 값의 범위는 $-1 < x < 1$

(i), (ii)로부터 주어진 부등식의 해는 $-4 < x < 1$

따라서 $\alpha = -4, \beta = 1, \alpha + \beta = -3$

14. 이차방정식 $x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근이 -3과 3 사이에 있도록 하는 정수 a 의 개수는?(단, $f(x) = x^2 - 2ax + 4$ 로 두고 풀어라.)

① 0개 ② 1개 ③ 2개 ④ 3개 ⑤ 4개

해설

$x^2 - 2ax + 4 = 0$ 의 서로 다른 두 근이
-3과 3 사이에 있으면

(i) $D > 0$, (ii) $f(-3) > 0$, (iii) $f(3) > 0$, (iv) 대칭축이 -3과 3 사이에 있다.

(i) $D > 0$ 에서 $\frac{D}{4} = a^2 - 4 > 0$

$$(a-2)(a+2) > 0$$

$$\therefore a < -2, a > 2$$

(ii) $f(-3) > 0$ 에서

$$f(-3) = 9 + 6a + 4 > 0, 6a > -13$$

$$\therefore a > -\frac{13}{6}$$

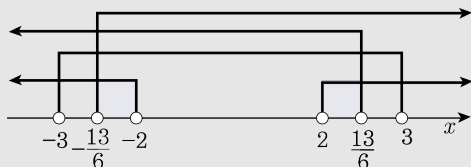
(iii) $f(3) > 0$ 에서

$$f(3) = 9 - 6a + 4 > 0, 13 > 6a, \therefore \frac{13}{6} > a$$

(iv) 대칭축의 방정식 $x = -\frac{(-2a)}{2} = a$ 에서

$$-3 < a < 3$$

(i), (ii), (iii), (iv)에서 a 값의 범위를 수직선으로 나타내면 다음 그림과 같다.



$\therefore -\frac{13}{6} < a < -2, 2 < a < \frac{13}{6}$ 이고 이 범위에 있는 정수는 없다.

16. 100 개의 연필을 학생들에게 나누어 주었더니 5 개씩 나눠주면 연필이 남고, 8 개씩 나눠 주면 연필이 모자란다. 이때, 학생의 수로 옳지 않은 것은?

① 12

② 13

③ 14

④ 15

⑤ 16

해설

문제에서 구하고자 하는 학생의 수를 x 라고 놓자.

모든 학생이 5 개씩 가지고 있을 때 전체 연필수는 $5x$ 이고, 모든 학생이 8 개씩 가지고 있을 때 전체 연필수는 $8x$ 이다. 그러나 연필수는 모든 학생이 5 개씩 가질 때 보다 많고, 모든 학생이 8 개씩 가질 때 보다 적으므로, 이를 식으로 나타내면 $5x < 100 < 8x$ 이다.

이를 연립부등식으로 표현하면
$$\begin{cases} 5x < 100 \\ 8x > 100 \end{cases} \quad \text{이고, 간단히 하}$$

면,
$$\begin{cases} x < 20 \\ x > \frac{25}{2} \end{cases} \quad \text{이다. 이를 다시 나타내면 } \frac{25}{2} < x < 20 \text{ 이다.}$$

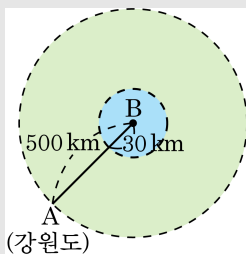
$\frac{25}{2} = 12.5$ 이므로, 학생의 수는 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 명이 가능하다.

17. 강원도에서 북동쪽으로 500km 떨어진 해상에 태풍의 중심이 생성되었다. 이 태풍은 현재 중심에서 반지름의 길이가 30km 인 크기로 세력권이 형성되어 있으며 시속 20km 의 속도로 남서쪽으로 진행하고 있다. 태풍 세력권의 반지름의 길이가 매시 10km 씩 길어지고 있을 때, 강원도는 태풍의 세력권에 몇 시간 동안 들어가게 되는지 구하여라.

▶ 답 : 시간

▷ 정답 : $\frac{112}{3}$ 시간

해설



다음 그림과 같이 강원도를 A, 태풍의 중심을 B 라고 하면
강원도가 t 시간 동안 세력권에 있을 조건은

$$\overline{AB} \leq (\text{세력권의 반지름의 길이})$$

이 때, $\overline{AB} = |500 - 20t|$ 이므로

$$|500 - 20t| \leq 30 + 10t$$

1) $500 - 20t \geq 0$ 일 때, 즉, $t \leq 25$

$$500 - 20t \leq 30 + 10t, t \geq \frac{47}{3}$$

$$\therefore \frac{47}{3} \leq t \leq 25$$

2) $500 - 20t < 0$ 일 때, 즉 $t > 25$

$$-500 + 20t \leq 30 + 10t, t \leq 53$$

$$\therefore 25 < t \leq 53$$

1), 2) 에서 $\frac{47}{3} \leq t \leq 53$ 일 때 태풍의 세력권에 있으므로 $53 -$

$$\frac{47}{3} = \frac{112}{3} \text{ (시간) 동안 태풍의 세력권에 있다.}$$

18. 이차방정식 $x^2 + 2ax + b = 0$ 의 두 근을 α, β 라 할 때, 이차부등식 $(4a + b + 4)x^2 + 2(a + 2)x + 1 < 0$ 을 풀면? (단, $\alpha > \beta > 2$)

① $\frac{1}{\beta - 2} < x < \frac{1}{\alpha - 2}$

② $\frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$

③ $x < \alpha - 2, x > \beta - 2$

④ $x < \beta - 2, x > \alpha - 2$

⑤ $\beta - 2 < x < \alpha - 2$

해설

근과 계수와의 관계로부터 $\alpha + \beta = -2a$, $\alpha\beta = b$ 이므로

$$4a + b + 4 = -2(\alpha + \beta) + \alpha\beta + 4 = (\alpha - 2)(\beta - 2),$$

$$2(a + 2) = 2a + 4 = -(\alpha + \beta) + 4 = -(\alpha + \beta - 4)$$

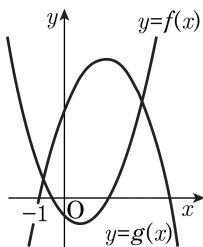
따라서, 주어진 이차부등식은

$$(\alpha - 2)(\beta - 2)x^2 - (\alpha + \beta - 4)x + 1 < 0$$

$$\therefore \{(\alpha - 2)x - 1\} \{(\beta - 2)x - 1\} < 0$$

$$\alpha > \beta > 2 \text{이므로 } \frac{1}{\alpha - 2} < x < \frac{1}{\beta - 2}$$

19. 이차함의 계수가 각각 1, -1 인 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$ 에 대하여 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 의 그래프는 다음의 그림과 같다. 부등식 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 이고 $f(2) = 1$ 일 때, $g(1)$ 의 값은?



- ① 4 ② 5 ③ 6 ④ 7 ⑤ 8

해설

$y = f(x)$ 의 y 절편이 -1 이므로 $f(x) = x^2 + ax - 1$ 로 놓을 수 있다.

$$f(2) = 2a + 3 = 1 \text{ 에서 } a = -1$$

$$\therefore f(x) = x^2 - x - 1$$

$g(x) = -x^2 + bx + c$ 로 놓으면 $f(x) - g(x) \leq 0$ 의 해가 $-1 \leq x \leq 3$ 이므로

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - (1+b)x - 1 - c = 2(x+1)(x-3) = 2x^2 - 4x - 6$$

$$\text{따라서, } 1+b = 4, -1-c = -6 \text{ 에서}$$

$$b = 3, c = 5$$

$$\therefore g(x) = -x^2 + 3x + 5$$

$$\therefore g(1) = 7$$

20. 두 부등식 $x^2 + ax + b \leq 0$, $x^2 + x + a > 0$ 을 동시에 만족하는 x 의 값의 범위가 $1 < x \leq 2$ 일 때, ab 의 값은?

① 0

② -1

③ -2

④ -3

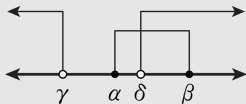
⑤ -4

해설

$x^2 + ax + b \leq 0$ 의 해를 $\alpha \leq x \leq \beta$

$x^2 + x + a > 0$ 의 해를 $x < \gamma$, $x > \delta$

라 하고



조건에 맞게끔 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 공통범위가 $1 < x \leq 2$ 이므로

$\delta = 1, \beta = 2$ 가 되어야 한다.

$\delta = 1$ 이 $x^2 + x + a = 0$ 의 근이므로

$1 + 1 + a = 0$ 에서 $a = -2$

$\beta = 2$ 가 $x^2 + ax + b = 0$ 의 근이므로

$4 + 2a + b = 0 \quad \therefore b = 0$

따라서 $ab = 0$