

1. 두 이차방정식 $x^2 - 3x + a = 0$, $x^2 - 5x - b = 0$ 의 공통인 근이 2일 때, $a - b$ 의 값은?

① 4

② -6

③ -8

④ 8

⑤ -4

해설

2는 두 이차방정식의 공통인 근이므로 각각의 이차방정식에 $x = 2$ 를 대입하면

$$2^2 - 3 \times 2 + a = 0$$

$$\therefore a = 2$$

$$2^2 - 5 \times 2 - b = 0$$

$$\therefore b = -6 \therefore a - b = 2 - (-6) = 8$$

2. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

- ~~(가)~~ 원점을 꼭짓점으로 한다.
- ~~(나)~~ 대칭축은 y 축이다.
- ~~(다)~~ y 의 값의 범위는 $y > 0$ 이다.
- ~~(라)~~ $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

- ①

~~(가)~~, ~~(나)~~
- ②

~~(가)~~, ~~(나)~~, ~~(다)~~
- ③

~~(나)~~, ~~(다)~~
- ④

~~(가)~~, ~~(나)~~, ~~(라)~~
- ⑤

~~(다)~~, ~~(라)~~

해설

- ~~(다)~~ y 의 값의 범위는 $y \geq 0$
- ~~(라)~~ $x < 0$ 에서 x 값 증가, y 는 감소

3. 이차함수 $y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수는?

① $y = -2x^2$

② $y = -\frac{1}{2}x^2$

③ $y = 2x^2$

④ $y = \frac{1}{2}x^2$

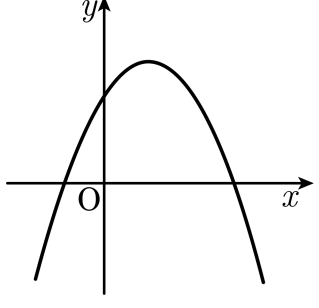
⑤ $y = \frac{1}{3}x^2$

해설

$y = -\frac{1}{2}x^2$ 의 y 대신에 $-y$ 를 대입하면

$y = \frac{1}{2}x^2$ 이다.

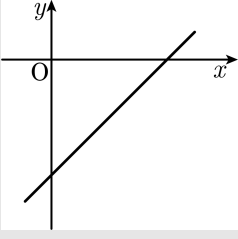
4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 지나가는 사분면은?



- ① 제 1,2,3 사분면
- ② 제 1,3,4 사분면
- ③ 제 1,2,4 사분면
- ④ 제 2,3,4 사분면
- ⑤ 제 1,3 사분면

해설

그래프에서 위로 볼록이므로 $a < 0$,
축 $x = -\frac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b > 0$, y 절편 $c > 0$ 이다.
 $ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$
기울기 $-\frac{a}{b} > 0$, y 절편 $-\frac{c}{b} < 0$
따라서 직선의 모양은 다음과 같다.



∴ 제 1,3,4 사분면을 지난다.

5. $y = ax^2 + bx + c$ 그래프가 제 2, 3, 4 사분면을 지난다고 할 때, a, b, c 의 부호가 바르게 짝지어 진 것은?
- ① $a > 0, b > 0, c > 0$

② $a > 0, b > 0, c < 0$

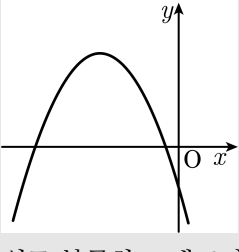
③ $a > 0, b < 0, c < 0$

④ $a < 0, b < 0, c > 0$

⑤ $a < 0, b < 0, c < 0$

해설

그림을 그려 보면 다음과 같다.

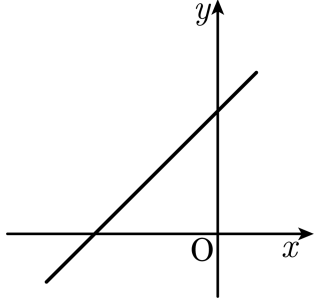


위로 볼록한 그래프이므로 $a < 0$

축의 방정식 $x = -\frac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편이 음수이므로 $c < 0$

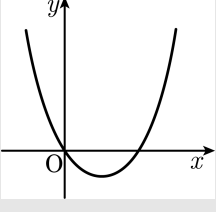
6. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?



- ① x 축 위 ② y 축 위 ③ 제 1 사분면
④ 제 2 사분면 ⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 축은 y 축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



7. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 다음 조건을 만족할 때, 다음 중 옳은 것은?
- I. $\frac{b}{2a} = -1$
II. 최댓값은 있으나, 최솟값은 없다.
III. 점 $\left(\frac{5}{3}, 0\right)$ 을 지난다.
- ① $a > 0$
② $c > 0$
③ 다른 한 x 절편이 $-\frac{1}{3}$ 이다.
④ 꼭짓점이 제 3 사분면에 있다.
⑤ 그래프는 제 2 사분면을 지나지 않는다.

해설

꼭짓점이 제 1 사분면에 있고, 위로 볼록한데 y 절편이 원점 아래에 있기 때문에 제 2 사분면을 지나지 않는다.

8. 이차함수 $y = -(x+2)^2 + 1$ 의 그래프는 $y = -x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. $m - n$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ -1 ④ 3 ⑤ -3

해설

$$\begin{aligned} m &= -2, n = 1 \\ \therefore m - n &= (-2) - 1 = -3 \end{aligned}$$

9. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 24$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x$ 의 위에 있을 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 4ax + 24 \\ &= (x - 2a)^2 - 4a^2 + 24 \end{aligned}$$

꼭짓점 $(2a, -4a^2 + 24)$ 가 직선 $y = 2x$ 의 위에 있으므로

$$-4a^2 + 24 = 4a$$

$$a^2 + a - 6 = 0$$

$$(a - 2)(a + 3) = 0$$

따라서 양수 $a = 2$ 이다.

10. $\sqrt{120-x} - \sqrt{5+x}$ 의 값이 가장 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x = 20$

해설

$\sqrt{120-x}$, $\sqrt{5+x}$ 둘 다 자연수가 되어야 한다. $\sqrt{120-x}$ 가 최대 $\sqrt{5+x}$ 가 최소가 되려면 $x = 20$ 이어야 한다.

11. 자연수 x 에 대하여 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $f(x)$ 라고 할 때, $f(150) - f(99)$ 의 값은?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$f(150) - f(99)$ 는 $\sqrt{99}$ 초과 $\sqrt{150}$ 이하의 자연수의 개수이다.
 $\sqrt{99} < 10, 11, 12 \leq \sqrt{150}$
 $\therefore$ 3개

12. $\sqrt{57+x} = 4\sqrt{5}$ 일 때, 양수 x 값은?

① 32

② 23

③ 11

④ 9

⑤ 3

해설

$$\begin{aligned} 4\sqrt{5} &= \sqrt{80} \\ \sqrt{80} &= \sqrt{57+x} \text{ 이므로 } x = 23 \text{ 이다.} \end{aligned}$$

13. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

- ① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

A , B , C 가 모두 양수이므로 A^2 , B^2 , C^2 을 구해서 비교해도 좋다.

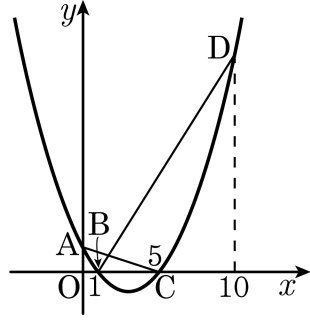
$$\begin{aligned} A^2 &= (\sqrt{20} + \sqrt{80})^2 \\ &= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 \\ &= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 \\ &= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{1600} &< \sqrt{1659} < \sqrt{1716} \text{ 이므로 } A^2 < B^2 < C^2 \\ \therefore A &< B < C \end{aligned}$$

14. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD의 넓이를 구하면?



- ① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times c = 12 \text{ 이다.}$$

$$c = 6, \text{ 즉 } A(0, 6) \text{ 이다.}$$

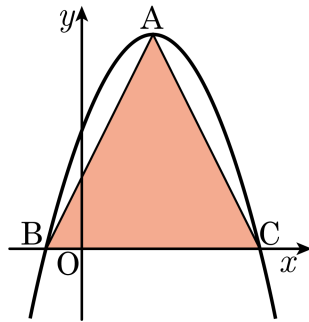
$$y = ax^2 + bx + 6 = a(x - 1)(x - 5) = ax^2 - 6ax + 5a \text{ 이다.}$$

$$5a = 6, a = \frac{6}{5}, b = -\frac{36}{5} \text{ 이다.}$$

$$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6 \text{ 이므로 } D(10, 54) \text{ 이다.}$$

$$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5 - 1) \times 54 = 108$$

15. 다음은 $y = a(x - 2)^2 + 6$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 18 일 때, a 의 값을 구하면?



- ① -2 ② $-\frac{5}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ -1 ⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

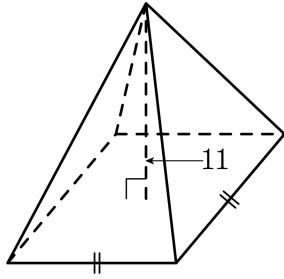
$$18 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times 6, 18 = 3 \overline{BC}, \overline{BC} = 6$$

따라서 점 B 의 좌표는 (-1, 0) 이고, C 의 좌표는 (5, 0) 이다.

$y = a(x - 2)^2 + 6$ 에 (5, 0) 을 대입하면 $9a + 6 = 0$ 이다.

$$\therefore a = -\frac{2}{3}$$

16. 다음 그림에서 각뿔의 부피가 330 cm^3 일 때, 밑면의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : cm

▷ 정답 : $3\sqrt{10}$ cm

해설

밑면의 한 변의 길이 : $x\text{ cm}$

$$\frac{1}{3} \times x^2 \times 11 = 330, x^2 = 90$$

$$\therefore x = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}(\text{cm})$$

17. 양수 a, b, c 에 대하여 $A = a + b + ab, B = b + c + bc, C = c + a + ca$ 이고, $A + B + C = 33, A - B + C = -1, A + B - C = 11$ 일 때, $a + b + c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a + b + c = 8$

해설

$$\begin{cases} A + B + C = 33 & \cdots \textcircled{㉠} \\ A - B + C = -1 & \cdots \textcircled{㉡} \\ A + B - C = 11 & \cdots \textcircled{㉢} \end{cases}$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉡} \text{ 에서 } 2B = 34$$

$$\textcircled{㉠} - \textcircled{㉢} \text{ 에서 } 2C = 22$$

$$\textcircled{㉡} + \textcircled{㉢} \text{ 에서 } 2A = 10$$

$$\therefore A = 5, B = 17, C = 11 \text{ 이므로}$$

$$5 = a + b + ab \text{ 에서 } (a + 1)(b + 1) = 6$$

$$17 = b + c + bc \text{ 에서 } (b + 1)(c + 1) = 18$$

$$11 = c + a + ca \text{ 에서 } (c + 1)(a + 1) = 12$$

세 식을 모두 곱하면

$$\{(a + 1)(b + 1)(c + 1)\}^2 = 6 \times 18 \times 12$$

$$\therefore (a + 1)(b + 1)(c + 1) = 36$$

$$c + 1 = 6, c = 5$$

$$a + 1 = 2, a = 1$$

$$b + 1 = 3, b = 2$$

$$\therefore a + b + c = 8$$

18. 이차방정식 $x^2 + 3x - 5 = 0$ 의 한 근이 p 일 때, $\frac{p^3 + 3p^2 + 15}{p + 3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2 + 3x - 5 = 0$ 에 $x = p$ 를 대입하면

$p^2 + 3p - 5 = 0, p^2 + 3p = 5$

주어진 식을 변형하여 $p^2 + 3p = 5$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{p^3 + 3p^2 + 15}{p + 3} &= \frac{p(p^2 + 3p) + 15}{p + 3} \\ &= \frac{5p + 15}{p + 3} \\ &= \frac{5(p + 3)}{p + 3} \\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p^3 + 3p^2 + 15}{p + 3} = 5$$

19. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$$

$$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$$

양변에 2를 곱하면

$$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$$

$$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$$

$$p-q=q-r=r-p=0$$

$$\therefore p=q=r$$

따라서 p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

20. 방정식 $(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=12$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 (x, y) 에 대하여 x^2+y^2 의 최댓값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 109

해설

주어진 식을 전개하여 정리하면, $4-4(x+y)+(x+y)^2-(x^2+y^2)=12$,
 $-4(x+y)+2xy=8$, $xy-2(x+y)=4$, $xy-2(x+y)+4=8$,
 $(x-2)(y-2)=8$
그런데 x, y 는 정수이므로,

$x-2$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y-2$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
x^2+y^2	109	52	52	109	37	4	4	37

따라서 x^2+y^2 의 최댓값은 109 이다.