1. 두 이차방정식 $x^2-3x+a=0$, $x^2-5x-b=0$의 공통인 근이 2일 때, $a-b$의 값은?

① 4 ② -6 ③ -8 ④ 8 ⑤ -4

해설

2 는 두 이차방정식의 공통인 근이므로 각각의 이차방정식에 $x=2$를 대입하면

$2^2-3\times2+a=0$

$\therefore a=2$

$2^2-5\times2-b=0$

$\therefore b=-6 \therefore a-b=2-(-6)=8$

2. 이차함수 $y = x^2$ 의 그래프에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

(가) 원점을 꼭짓점으로 한다. (나) 대칭축은 y 축이다. (다) y 의 값의 범위는 $y > 0$ 이다. (라) $x < 0$ 일 때, x 의 값이 증가하면 y 의 값도 증가한다.

① (가), (나)
② (가), (나), (다)
③ (나), (다)
④ (가), (나), (라)
⑤ (다), (라)

해설

(다) y 의 값의 범위는 $y \geq 0$
(라) $x < 0$ 에서 x 값 증가, y 는 감소

3. 이차함수 $y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 그래프와 x 축에 대하여 대칭인 이차함수는?

① $y=-2x^2$ ② $y=-\frac{1}{2}x^2$ ③ $y=2x^2$

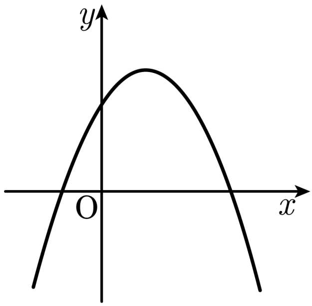
④ $y=\frac{1}{2}x^2$ ⑤ $y=\frac{1}{3}x^2$

해설

$y=-\frac{1}{2}x^2$ 의 y 대신에 $-y$ 를 대입하면

$y=\frac{1}{2}x^2$ 이다.

4. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프가 그림과 같을 때, 직선 $ax + by + c = 0$ 의 그래프가 지나는 사분면은?



① 제 $1, 2, 3$ 사분면

② 제 $1, 3, 4$ 사분면

③ 제 $1, 2, 4$ 사분면

④ 제 $2, 3, 4$ 사분면

⑤ 제 $1, 3$ 사분면

해설

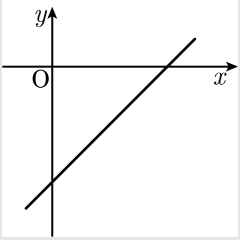
그래프에서 위로 볼록이므로 $a < 0$,

축 $x = -\dfrac{b}{2a} > 0$ 이므로 $b > 0$, y 절편 $c > 0$ 이다.

$ax + by + c = 0 \leftrightarrow y = -\dfrac{a}{b}x - \dfrac{c}{b}$

기울기 $-\dfrac{a}{b} > 0$, y 절편 $-\dfrac{c}{b} < 0$

따라서 직선의 모양은 다음과 같다.



$\therefore$ 제 $1, 3, 4$ 사분면을 지난다.

5. $y = ax^2 + bx + c$ 그래프가 제 2, 3, 4 사분면을 지난다고 할 때, a, b, c 의 부호가 바르게 짝지어 진 것은?

① $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$

② $a > 0$, $b > 0$, $c < 0$

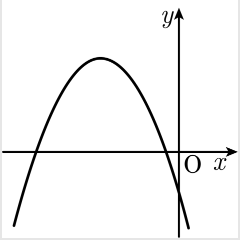
③ $a > 0$, $b < 0$, $c < 0$

④ $a < 0$, $b < 0$, $c > 0$

⑤ $a < 0$, $b < 0$, $c < 0$

해설

그림을 그려 보면 다음과 같다.

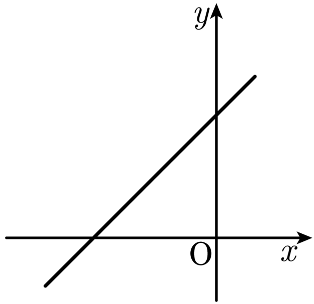


위로 볼록한 그래프이므로 $a < 0$

축의 방정식 $x = -\dfrac{b}{2a} < 0$ 이므로 $b < 0$

y 절편이 음수이므로 $c < 0$

6. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, $y = ax^2 - bx$ 의 그래프의 꼭짓점은 어느 위치에 있는가?

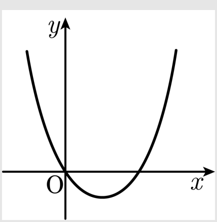


① x 축 위　　② y 축 위　　③ 제 1 사분면

④ 제 2 사분면　　⑤ 제 4 사분면

해설

$a > 0, b > 0$ 이므로 $y = ax^2 - bx$ 의 그래프는 아래로 볼록하고 축은 y 축의 오른쪽에 있으며 원점을 지난다.



7. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 가 다음 조건을 만족할 때, 다음 중 옳은 것은?

Ⅰ. $\dfrac{b}{2a} = -1$

Ⅱ. 최댓값은 있으나. 최솟값은 없다.

Ⅲ. 점 $\left(\dfrac{5}{3},\ 0\right)$ 을 지난다.

① $a > 0$

② $c > 0$

③ 다른 한 x 절편이 $-\dfrac{1}{3}$ 이다.

④ 꼭짓점이 제 3 사분면에 있다.

⑤ 그래프는 제 2 사분면을 지나지 않는다.

해설

꼭짓점이 제 1사분면에 있고, 위로 볼록한데 y 절편이 원점 아래에 있기 때문에 제 2사분면을 지나지 않는다.

8. 이차함수 $y=-(x+2)^2+1$ 의 그래프는 $y=-x^2$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 m 만큼, y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 것이다. $m-n$ 의 값은?

① 1　② 2　③ -1　④ 3　⑤ -3

해설

$m=-2,\ n=1$

$\therefore\ m-n=(-2)-1=-3$

9. 이차함수 $y = x^2 - 4ax + 24$ 의 그래프의 꼭짓점이 직선 $y = 2x$ 의 위에 있을 때, 양수 a 의 값을 구하면?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$$y = x^2 - 4ax + 24$$
$$= (x - 2a)^2 - 4a^2 + 24$$

꼭짓점 $(2a,\ -4a^2 + 24)$ 가 직선 $y = 2x$ 의 위에 있으므로

$$-4a^2 + 24 = 4a$$
$$a^2 + a - 6 = 0$$
$$(a - 2)(a + 3) = 0$$

따라서 양수 $a = 2$ 이다.

10. $\sqrt{120-x}-\sqrt{5+x}$ 의 값이 가장 큰 자연수가 되도록 하는 자연수 x 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $x=20$

해설

$\sqrt{120-x}$, $\sqrt{5+x}$ 둘 다 자연수가 되어야 한다. $\sqrt{120-x}$ 가 최대 $\sqrt{5+x}$ 가 최소가 되려면 $x=20$ 이어야 한다.

11. 자연수 x 에 대하여 $\sqrt{x}$ 이하의 자연수의 개수를 $f(x)$ 라고 할 때, $f(150)-f(99)$ 의 값은?

① 2개 ② 3개 ③ 4개 ④ 5개 ⑤ 6개

해설

$f(150)-f(99)$ 는 $\sqrt{99}$ 초과 $\sqrt{150}$ 이하의 자연수의 개수이다.

$\sqrt{99} < 10, 11, 12 \le \sqrt{150}$

$\therefore$ 3개

12. $\sqrt{57+x} = 4\sqrt{5}$ 일 때, 양수 x 값은?

① 32　② 23　③ 11　④ 9　⑤ 3

해설

$4\sqrt{5} = \sqrt{80}$

$\sqrt{80} = \sqrt{57+x}$ 이므로 $x = 23$ 이다.

13. 세 실수 $A = \sqrt{20} + \sqrt{80}$, $B = \sqrt{21} + \sqrt{79}$, $C = \sqrt{22} + \sqrt{78}$ 의 대소 관계가 바르게 된 것은?

① $A < B < C$ ② $A < C < B$ ③ $B < A < C$
④ $C < A < B$ ⑤ $C < B < A$

해설

$A,\ B,\ C$ 가 모두 양수이므로 $A^2,\ B^2,\ C^2$ 을 구해서 비교해도 좋다.

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{20} + \sqrt{80}\right)^2 \\ &= 20 + 2\sqrt{20 \times 80} + 80 = 100 + 2\sqrt{1600} \end{aligned}$$

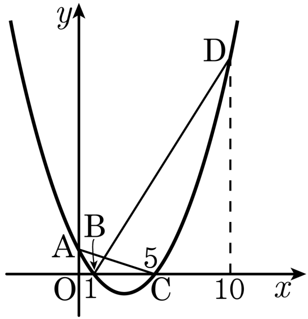
$$\begin{aligned} B^2 &= (\sqrt{21} + \sqrt{79})^2 \\ &= 21 + 2\sqrt{21 \times 79} + 79 = 100 + 2\sqrt{1659} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= (\sqrt{22} + \sqrt{78})^2 \\ &= 22 + 2\sqrt{22 \times 78} + 78 = 100 + 2\sqrt{1716} \end{aligned}$$

$\sqrt{1600} < \sqrt{1659} < \sqrt{1716}$ 이므로 $A^2 < B^2 < C^2$

$\therefore A < B < C$

14. 다음 그림은 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 의 그래프이다. 삼각형 ABC 의 넓이가 12 일 때, 삼각형 BCD 의 넓이를 구하면?



① 106 ② 107 ③ 108 ④ 109 ⑤ 110

해설

$\triangle ABC = \frac{1}{2} \times (5-1) \times c = 12$ 이다.

$c = 6$, 즉 $A(0, 6)$ 이다.

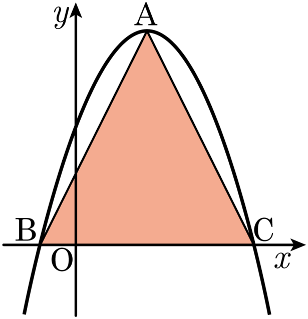
$y = ax^2 + bx + 6 = a(x-1)(x-5) = ax^2 - 6ax + 5a$ 이다.

$5a = 6$, $a = \frac{6}{5}$, $b = -\frac{36}{5}$ 이다.

$y = \frac{6}{5}x^2 - \frac{36}{5}x + 6$ 이므로 $D(10, 54)$ 이다.

$\triangle BCD = \frac{1}{2} \times (5-1) \times 54 = 108$

15. 다음은 $y = a(x-2)^2 + 6$ 의 그래프이다. $\triangle ABC$ 의 넓이가 18 일 때, a 의 값을 구하면?



① -2　　② $-\frac{5}{3}$　　③ $-\frac{4}{3}$　　④ -1　　⑤ $-\frac{2}{3}$

해설

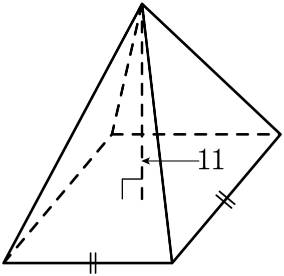
$18 = \frac{1}{2} \times \overline{BC} \times 6,\ 18 = 3\,\overline{BC},\ \overline{BC} = 6$

따라서 점 B 의 좌표는 $(-1,\ 0)$ 이고, C 의 좌표는 $(5,\ 0)$ 이다.

$y = a(x-2)^2 + 6$ 에 $(5,\ 0)$ 을 대입하면 $9a + 6 = 0$ 이다.

$\therefore a = -\frac{2}{3}$

16. 다음 그림에서 각뿔의 부피가 $330\,\text{cm}^3$ 일 때, 밑면의 한 변의 길이를 구하여라.



▶ 답 : $\underline{\quad\quad\quad\quad\quad \text{cm}}$

▷ 정답 : $3\sqrt{10}$ $\underline{\text{cm}}$

해설

밑면의 한 변의 길이 : $x\,\text{cm}$

$\dfrac{1}{3} \times x^2 \times 11 = 330,\ x^2 = 90$

$\therefore\ x = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}\,(\text{cm})$

17. 양수 $a,\ b,\ c$ 에 대하여 $A=a+b+ab,\ B=b+c+bc,\ C=c+a+ca$ 이고, $A+B+C=33,\ A-B+C=-1,\ A+B-C=11$ 일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a+b+c=8$

해설

$$\begin{cases} A+B+C=33 & \cdots ㉠ \\ A-B+C=-1 & \cdots ㉡ \\ A+B-C=11 & \cdots ㉢ \end{cases}$$

㉠ − ㉡ 에서 $2B=34$

㉠ − ㉢ 에서 $2C=22$

㉡ + ㉢ 에서 $2A=10$

$\therefore\ A=5,\ B=17,\ C=11$ 이므로

$5=a+b+ab$ 에서 $(a+1)(b+1)=6$

$17=b+c+bc$ 에서 $(b+1)(c+1)=18$

$11=c+a+ca$ 에서 $(c+1)(a+1)=12$

세 식을 모두 곱하면

$\{(a+1)(b+1)(c+1)\}^2=6\times18\times12$

$\therefore\ (a+1)(b+1)(c+1)=36$

$c+1=6,\ c=5$

$a+1=2,\ a=1$

$b+1=3,\ b=2$

$\therefore\ a+b+c=8$

18. 이차방정식 $x^2+3x-5=0$ 의 한 근이 p 일 때, $\frac{p^3+3p^2+15}{p+3}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$x^2+3x-5=0$ 에 $x=p$ 를 대입하면
$p^2+3p-5=0$, $p^2+3p=5$
주어진 식을 변형하여 $p^2+3p=5$ 를 대입하면

$$\begin{aligned}\frac{p^3+3p^2+15}{p+3} &= \frac{p(p^2+3p)+15}{p+3}\\ &= \frac{5p+15}{p+3}\\ &= \frac{5(p+3)}{p+3}\\ &= 5\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p^3+3p^2+15}{p+3}=5$$

19. p, q, r 에 대하여 $(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$ 이 성립할 때, p, q, r 을 세 변으로 하는 삼각형은 어떤 삼각형인지 말하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 정삼각형

해설

$(p+q+r)^2 = 3pq+3qr+3rp$
$p^2+q^2+r^2+2pq+2qr+2rp = 3pq+3qr+3rp$
$p^2+q^2+r^2-pq-qr-rp = 0$
양변에 2 를 곱하면
$2p^2+2q^2+2r^2-2pq-2qr-2rp = 0$
$(p-q)^2+(q-r)^2+(r-p)^2 = 0$
$p-q = q-r = r-p = 0$
$\therefore\ p = q = r$
따라서 p, q, r을 세 변으로 하는 삼각형은 정삼각형이다.

20. 방정식 $(2-x-y)^2-(x^2+y^2)=12$ 을 만족하는 정수의 순서쌍 $(x,\ y)$ 에 대하여 x^2+y^2 의 최댓값을 구하여라.

▶ **답 :**

▷ **정답 :** 109

해설

주어진 식을 전개하여 정리하면, $4-4(x+y)+(x+y)^2-(x^2+y^2)=12$,

$-4(x+y)+2xy=8,\quad xy-2(x+y)=4,\ xy-2(x+y)+4=8,$

$(x-2)(y-2)=8$

그런데 $x,\ y$ 는 정수이므로,

$x-2$	1	2	4	8	-1	-2	-4	-8
$y-2$	8	4	2	1	-8	-4	-2	-1
x^2+y^2	109	52	52	109	37	4	4	37

따라서 x^2+y^2 의 최댓값은 109 이다.