

1. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 2 개

해설

$\frac{2x+4}{3} \geq \frac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,
 $4x+8 \geq 3x-6-6x$,
 $x \geq -2$
 $0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,
 $6x-9 \leq 2x+12+3$,
 $x \leq 6$
 $1.2x - \frac{1}{2} < 0.8x + \frac{3}{5}$ 의 양변에 10을 곱하면
 $12x-5 < 8x+6$,
 $4x < 11$,
 $x < \frac{11}{4}$
연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \frac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 1, 2의 2개이다.

2. 등식 $2(x + 2y) + 1 = -x + 3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1 < 2x + y < 1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이]
 $2(x + 2y) + 1 = -x + 3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y = (\text{㉠})$ 이 된다.
 $-1 < 2x + y < 1$ 를 풀 때 y 대신 $y = (\text{㉠})$ 를 대입하면 $-1 < -x - 1 < 1$ 이 된다.
부등식을 풀면 $-2 < x < 0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
 x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y = (\text{㉢})$ 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x - 1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x + 2y) + 1 = -x + 3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$$2(x + 2y) + 1 = -x + 3y$$

$$2x + 4y + 1 = -x + 3y$$

$$4y - 3y = -x - 2x - 1$$

$$y = -3x - 1$$

$-1 < 2x + y < 1$ 에 y 대신 $y = -3x - 1$ 를 대입하면

$$-1 < 2x + (-3x - 1) < 1$$

$$-1 < -x - 1 < 1$$

$$0 < -x < 2$$

$$-2 < x < 0$$

정수인 x 는 -1 이 된다.

x 값을 $y = -3x - 1$ 에 대입하면 $y = 2$ 이다.

3. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\frac{2+x}{3} \geq x + a$ 의 공통 부분이 없을 때, a 의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$$0.7 - x \leq -2 - 0.1x \quad 7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27, \quad x \geq 3$$

$$\frac{2+x}{3} \geq x + a \quad 2 + x \geq 3x + 3a - 2x \geq 3a - 2, \quad x \leq 1 - \frac{3}{2}a$$

공통 부분이 없으므로 $1 - \frac{3}{2}a < 3$,

$$-\frac{3}{2}a < 2$$

$$\therefore a > -\frac{4}{3}$$

따라서 가장 작은 정수 a 의 값은 -1이다.

4. $a-1 < x < a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1 < x < 3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0 < a < 2$

② $0 \leq a \leq 2$

③ $a < 0, a > 2$

④ $a \leq 0, a \geq 2$

⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \geq -1$ 이고, $a+1 \leq 3$ 이어야 하므로

$$a \geq 0, a \leq 2$$

$$\therefore 0 \leq a \leq 2$$

5. 연속하는 세 정수의 합이 30 보다 크고 36 보다 작을 때, 세 정수 중 가운데 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

연속한 세 정수 $x-1$, x , $x+1$
 $30 < (x-1) + x + (x+1) < 36$
 $30 < 3x < 36$
 $10 < x < 12$
 $\therefore x = 11$

6. 부등식 $|x^2 + x + 1| \leq |x + 2|$ 의 해는?

① $x \leq -1$

② $-1 \leq x \leq 1$

③ $x \geq 1$

④ 해는 없다.

⑤ 모든 실수

해설

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{이므로}$$

$$|x^2 + x + 1| = x^2 + x + 1$$

$$x^2 + x + 1 \leq |x + 2| \text{에서}$$

(i) $x < -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq -(x + 2), \quad x^2 + 2x + 3 \leq 0$$

$$(x + 1)^2 + 2 \leq 0$$

그런데 $(x + 1)^2 > 0$ 이므로 해는 없다.

(ii) $x \geq -2$ 일 때,

$$x^2 + x + 1 \leq x + 2, \quad x^2 \leq 1$$

$$\therefore -1 \leq x \leq 1$$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \leq x \leq 1$

7. 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 이차부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$ 의 해를 바르게 구한 것은?

- ① $-1 \leq x < 2$ ② $x \leq -1$ ③ $x \geq 1$
④ $x \leq 1$ ⑤ $x \leq -1, x \geq 2$

해설

$$2[x]^2 - [x] - 6 < 0 \text{에서}$$

$$([x] - 2)(2[x] + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < [x] < 2$$

$$-1 \leq [x] < 2 \quad \therefore -1 \leq x < 2$$

8. 함수 $f(x) = (x^2 + 2ax + 3)^2 + (x^2 + 2ax + 3) - 6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x) \geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

- ① $-1 \leq a \leq 1$ ② $-1 < a \leq 0$ ③ $-1 < a < 0$
④ $0 \leq a < 1$ ⑤ $0 < a \leq 1$

해설

$x^2 + 2ax + 3 = t$ 로 놓으면
 $t^2 + t - 6 \geq 0, (t+3)(t-2) \geq 0$
 $\therefore t \leq -3$ 또는 $t \geq 2$
(i) $t \leq -3$, 즉 $g(x) \leq -3$ 일 때
 $x^2 + 2ax + 3 \leq -3$ 에서 $x^2 + 2ax + 6 \leq 0$
 $y = x^2 + 2ax + 6$ 의 그래프는
아래로 볼록한 포물선이므로
모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.
(ii) $t \geq 2$, 즉 $g(x) \geq 2$ 일 때
 $x^2 + 2ax + 3 \geq 2$ 에서 $x^2 + 2ax + 1 \geq 0$
이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식
 $x^2 + 2ax + 1 = 0$ 의 판별식을 D 라 하면
 $\frac{D}{4} = a^2 - 1 \leq 0 \quad \therefore -1 \leq a \leq 1$
(i), (ii)에서 $-1 \leq a \leq 1$

9. 부등식 $5 - x > 2|x + 1|$ 의 해와 $ax^2 + bx + 7 > 0$ 의 해가 같도록 상수 a, b 의 값을 정할 때, $a + b$ 의 값은 ?

- ① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5 - x > 2|x + 1|$ 을 풀면
(i) $x \geq -1$ 일 때
 $5 - x > 2x + 2, x < 1 \quad \therefore -1 \leq x < 1$
(ii) $x < -1$ 일 때
 $5 - x > -2x - 2, x > -7 \quad \therefore -7 < x < -1$
(i), (ii)에 따라 $-7 < x < 1$
 $ax^2 + bx + 7 > 0 \Leftrightarrow -7 < x < 1$ 이므로 $a < 0$ 이고
 $ax^2 + bx + 7 = a(x + 7)(x - 1)$
계수를 비교하면
 $a = -1, b = -6 \quad \therefore a + b = -7$

10. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx + 1)$ 이 곡선 $y = -(x - 2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 않는 것은?

- ① 1
- ② 2
- ③ 3
- ④ 0
- ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx + 1) > -(x - 2)^2 + 1 \cdots \textcircled{1}$
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
 $\textcircled{1}$ 식을 정리하면
 $x^2 + 2(k - 2)x + 5 > 0$
 $\textcircled{1}$ 식이 항상 성립하기 위하여
 $\frac{D}{4} = (k - 2)^2 - 5 < 0$
 $\Rightarrow k^2 - 4k - 1 < 0$
 $\therefore 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

11. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a - 3)x - 3a < 0$ 를 동시에 만족하는 정수가 -2 뿐일 때, a 의 값의 범위를 구하면 $m < a \leq n$ 이다. mn 의 값을 구하시오.

▶ 답 :

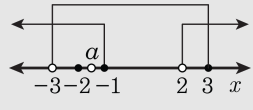
▷ 정답 : -6

해설

$$x^2 - x - 2 > 0 \text{에서 } x < -1, x > 2$$

$$x^2 - (a - 3)x - 3a < 0 \text{에서}$$

$$(x + 3)(x - a) < 0$$



그림에서와 같이 동시에 만족하는 정수값이 -2 뿐이려면 $-2 < a \leq 3$ 이다.

$$\therefore -2 < a \leq 3$$

12. 이차방정식 $x^2 - 2ax + a + 2 = 0$ 의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a 의 값의 범위는?

① $0 \leq a < 1$

② $1 \leq a < 2$

③ $2 \leq a < 3$

④ $3 \leq a < 4$

⑤ $4 \leq a < 5$

해설

$$f(x) = x^2 - 2ax + a + 2 = (x - a)^2 - a^2 + a + 2$$

i) $D/4 = a^2 - a - 2 \geq 0, \quad a \leq -1 \text{ or } a \geq 2$

ii) $f(1) = 1 - 2a + a + 2 > 0 \quad \therefore a < 3$

iii) 대칭축 $x = a > 1$

i), ii), iii)에서 $2 \leq a < 3$

13. 이차방정식 $x^2 - 2x + k = 0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1 과 2 사이에 있도록 k 값의 범위를 구하면?

- ① $k < 0, k > 1$ ② $k \leq 0, k \geq 2$ ③ $0 < k < 1$
④ $0 \leq k \leq 1$ ⑤ $0 < k < 2$

해설

$x^2 - 2x + k = f(x)$ 라 하면
 $f(0) > 0, f(1) < 0, f(2) > 0$
 $\therefore k > 0, k < 1$
 $\therefore 0 < k < 1$

14. 이차방정식 $x^2 + 2kx + k = 0$ 의 두 근이 모두 -1 과 1 사이에 있기 위한 k 값의 범위가 $a < k \leq b$ 라 할 때, ab 의 값은?

- ① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$$D/4 = k^2 - k \geq 0, k(k-1) \geq 0, \therefore k \leq 0, k \geq 1$$

$$f(x) = x^2 + 2kx + k \text{라 하면}$$

$$f(-1) = 1 - k > 0$$

$$\therefore k < 1$$

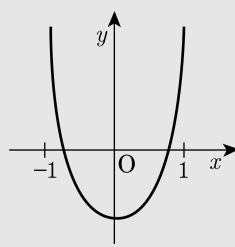
$$f(1) = 1 + 3k > 0 \therefore k > -\frac{1}{3}$$

$$\text{대칭축 } x = -k \text{ 이므로 } -1 < -k < 1$$

$$\therefore -1 < k < 1$$

$$\therefore -\frac{1}{3} < k \leq 0$$

$$\therefore ab = 0$$



15. 평면 위에 세 점 A(0, a), B(2, 3), C(1, 0) 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a 의 값의 합은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

$$\overline{AB}^2 = (0 - 2)^2 + (a - 3)^2 = a^2 - 6a + 13$$

$$\overline{BC}^2 = (2 - 1)^2 + (3 - 0)^2 = 10$$

$$\overline{AC}^2 = (0 - 1)^2 + (a - 0)^2 = a^2 + 1$$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 - 6a + 13 = 10 \text{ 즉 } a^2 - 6a + 3 = 0$$

$$\therefore a = 3 \pm \sqrt{6}$$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = 10 \text{ 즉 } a^2 = 9$$

$$\therefore a = \pm 3$$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2$ 에서

$$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13 \text{ 즉 } 6a = 12$$

$$\therefore a = 2$$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a

의 값의 합은

$$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$$

16. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$ 와 $(4, 0)$ 을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0, 1)$ 에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$ 에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1, 4)$

② $\left(\frac{10}{7}, 4\right)$

③ $\left(\frac{5}{3}, 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$

⑤ $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$ 과 $(4, 10)$ 을 연결하는 직선과 $y = 4$ 와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$ 를 지난다.

17. 세 꼭짓점이 A(-1, -1), B(4, 3), C(0, 1)인 $\triangle ABC$ 에서 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ 를 2 : 3으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3}, \frac{-1+3+1}{3} \right),$$

즉 (1, 1) 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 (1, 1)이다.

$$\therefore a+b=1+1=2$$

18. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1, 8), (-4, -2), (10, 2)$

② $(0, 8), (4, 2), (10, 0)$

③ $(-1, 8), (4, 2), (10, 0)$

④ $(-1, -8), (4, -2), (10, -2)$

⑤ $(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1, y_1) , (x_2, y_2) , (x_3, y_3) 로 놓으면,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2, \frac{x_2 + x_3}{2} = 3, \frac{x_3 + x_1}{2} = 5$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -4, x_2 + x_3 = 6, x_3 + x_1 = 10$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = -4, x_3 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3, \frac{y_2 + y_3}{2} = -1, \frac{y_3 + y_1}{2} = 4$$

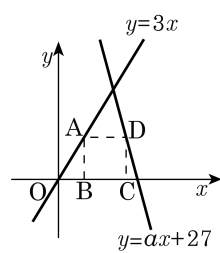
$$\therefore y_1 + y_2 = 6, y_2 + y_3 = -2, y_3 + y_1 = 8$$

$$\therefore y_1 = 8, y_2 = -2, y_3 = 0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$ 이다.

19. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프가 점 A를 지나고, 일차함수 $y = ax + 27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x 축 위의 점이다.)

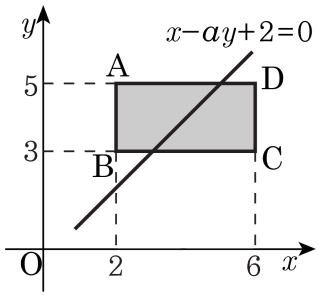


- ① -4 ② $-\frac{9}{2}$ ③ -5
 ④ $-\frac{11}{2}$ ⑤ -6

해설

$\overline{AB} = 3$ 이므로 점 A의 y 좌표는 3이고,
 점 A는 일차함수 $y = 3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1이다.
 점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 (1, 0)이고, $\overline{BC} = 3$ 이므로
 점 C의 좌표는 (4, 0)이다.
 점 C와 x 좌표가 같고, 점 A와 y 좌표가 같은 점 D의 좌표는
 (4, 3)이다.
 점 D가 일차함수 $y = ax + 27$ 위의 점이므로 $x = 4$, $y = 3$ 를
 대입하면 $3 = a \times 4 + 27$
 $\therefore a = -6$

20. 다음 그림에서 □ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x - ay + 2 = 0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{2}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2}, \frac{3+5}{2}\right)$

즉 (4, 4)이다.

직선 $x - ay + 2 = 0$ 이 점 (4, 4)를 지나야 한다.

따라서 (4, 4)를 대입하면 $4 - 4a + 2 = 0$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

21. 두 직선 $y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이고, 직선 $x = 2$ 와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$ 이다. 이때, $|a - b|$ 의 값은?
(단, $a > 0, b < 0$)

- ① 1
- ② 2
- ③ $\frac{3}{2}$
- ④ $\frac{5}{2}$
- ⑤ 4

해설

P(2, 2a), Q(2, 2b)

∴ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$

⇒ $a + b = \frac{3}{2}$ ∴ ㉠

$y = ax$ 와 $y = bx$ 가 서로 수직이므로

$a \times b = -1$ ∴ ㉡

∴ $(a + b)^2 = (a - b)^2 + 4ab$ 이므로

$(a - b)^2 = \frac{9}{4} + 4$

⇒ $a - b = \frac{5}{2}$ (∵ $a > 0, b < 0$)

22. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의 조건은?

$$3x + y + 2 = 0, \quad x + 3y + k = 0, \quad 2x - y + 3 = 0$$

- ① $k \neq -2$ ② $k \neq -3$ ③ $k \neq -4$
④ $k \neq -7$ ⑤ $k \neq -11$

해설

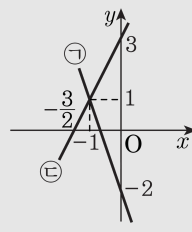
$$3x + y + 2 = 0 \dots \textcircled{7}$$

$x + 3y + k = 0 \dots \textcircled{L}$ 일 때,

$$2x - y + 3 = 0 \dots \textcircled{C}$$

다음 그림과 같이

세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.

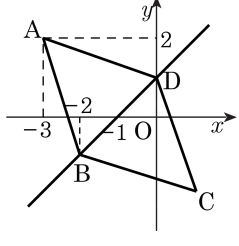


⑦, ⑧, ⑨ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.

㉠과 ㉡을 연립하여 교점의 좌표를 구하면 $(-1, 1)$ 이다.

이 점을 ㉔에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1 + 3 + k \neq 0$, $\therefore k \neq -2$

23. 다음 그림에서 점 B와 점 D를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $A(-3, 2)$ 일 때, 마름모 ABCD의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD의 중점은 $M(-1, 0)$, 사각형 ABCD가 마름모이므로

$\overline{AM} \perp \overline{BD}$,

$\overline{AM}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{BD}$ 의 기울기는 1 ,

점 B와 점 D의 y 값을 a, b 라 하면

$b - a = 2, \frac{a + b}{2} = 0$ 이므로 $a = -1, b = 1$ 이다.

$\therefore D(0, 1)$

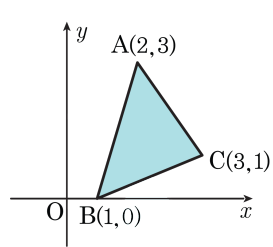
$\overline{AM} = 2\sqrt{2}, \overline{MD} = \sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD의 넓이는

$$4 \left(\frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} \right) = 8$$

24. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

- ① $-1 \leq m \leq 3$ ② $-1 \leq m \leq \frac{1}{3}$
 ③ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 1$ ④ $-\frac{1}{3} \leq m \leq 3$
 ⑤ $1 \leq m \leq 3$



해설

직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x + 1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 $P(-1, 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 $\triangle ABC$ 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

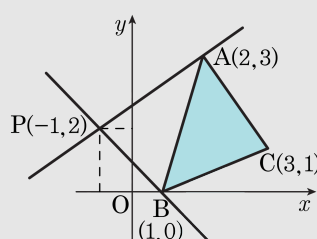
(직선 PB 의 기울기) $\leq -m \leq$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \leq -m \leq \frac{1}{3}$

$\therefore -\frac{1}{3} \leq m \leq 1$



25. 서로 다른 두 직선 $2x - ay - 2 = 0$, $x - (a - 3)y - 3 = 0$ 이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

- ① $\frac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\frac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\frac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\frac{3}{5}$ ⑤ $\frac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$$\begin{cases} 2x - ay - 2 = 0 \\ x - (a - 3)y - 3 = 0 \end{cases} \quad \text{정리하면}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{a}x - \frac{2}{a} \\ y = \frac{1}{a-3}x - \frac{3}{a-3} \end{cases} \quad \text{평행하므로}$$

$$\frac{2}{a} = \frac{1}{a-3}$$

$\therefore a = 6$ 대입하면

$$\begin{cases} x - 3y - 1 = 0 \\ x - 3y - 3 = 0 \end{cases}$$

$x - 3y - 1 = 0$ 위의 점 $(1, 0)$ 과 $x - 3y - 3 = 0$ 과의 거리는

$$\therefore \frac{|1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

26. 원점 $O(0, 0)$ 에서 직선 $(k+1)x + (k+2)y + 3 = 0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d = \frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2 + (k+2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2k^2 + 6k + 5}}$$

$$\leq \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 3\sqrt{2}$$

$$(\because \sqrt{2k^2 + 6k + 5})$$

$$= \sqrt{2\left(k + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{1}{2}}$$

28. 반지름이 20인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답: 개

▶ 정답 : 16개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현 CD이다.

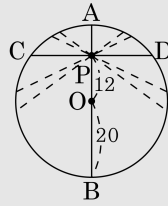
$$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32, \overline{AB} = 40$$

점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40 사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32,40인 것이 한 개.

33 34 35 36 37 38 39이 적이 각각 두 개씩 있다.

33, 34, 35,
: 1674

29. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y - 5)^2 = 9$$

- ① $y = \pm \sqrt{6}x + 10$

② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설

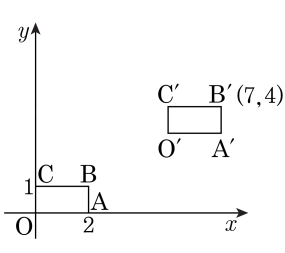
$x^2 + y^2 = 16 \dots\dots \textcircled{1},$
 $x^2 + (y - 5)^2 = 9 \dots\dots \textcircled{2}$
공통접선의 방정식을
 $y = ax + b \dots\dots \textcircled{3}$ 로 놓는다.
이때, 원 $\textcircled{1}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 이 접하므로
$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

 $\therefore |b| = 4\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{4}$
또, 원 $\textcircled{2}$ 과 직선 $\textcircled{3}$ 도 접하므로
$$\frac{|-5 + b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

 $\therefore |b - 5| = 3\sqrt{a^2 + 1} \dots\dots \textcircled{5}$
그런데 $b \neq 0$ 이므로 $\textcircled{4} \div \textcircled{5}$ 을 하면
$$\frac{|b - 5|}{b} = \frac{3}{4}$$

 $4|b - 5| = 3|b|, \quad 4(b - 5) = \pm 3b$
 $\therefore b = 20 \text{ 또는 } b = \frac{20}{7}$
(i) $b = 20$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서 $\sqrt{a^2 + 1} = 5$
 $\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$
(ii) $b = \frac{20}{7}$ 일 때, $\textcircled{4}$ 에서
 $\sqrt{a^2 + 1} = \frac{5}{7}$ 이고,
이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(i), (ii)로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
 $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

30. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 $O \rightarrow O', A \rightarrow A', B \rightarrow B', C \rightarrow C'$ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B' 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A'C' 의 방정식은?



- ① $x + 2y - 10 = 0$
 ② $x + 2y - 13 = 0$
- ③ $x + 2y - 16 = 0$
 ④ $2x + 3y - 17 = 0$
- ⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2,1) 이 점 B'(7,4) 로 옮겨지므로
 직사각형 O'A'B'C' 은 직사각형 OABC 를
 x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
 따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 A'(7,3), C'(5,4) 로 옮겨
 지므로

직선 A'C' 의 방정식은 $y - 3 = \frac{4 - 3}{5 - 7}(x - 7)$

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

$\therefore x + 2y - 13 = 0$

해설

직선 A'C' 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로

직선 A'C' 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\frac{1}{2}$ 이다.

한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$ 에서 점 A' 의 좌표는 (7,3) 이므로

이것을 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 에 대입하여 정리하면 $b = \frac{13}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선 A'C' 의 방정식은

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2},$

$\therefore x + 2y - 13 = 0$

31. 방정식 $f(x, y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A , y 축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B , 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C , 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D 라 하자. 직선 $2x + y + 1 = 0$ 을 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ 의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \rightarrow B$ 는 A 에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B 에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

- ① $2x + y + 1 = 0$ ② $2x + y - 1 = 0$ ③ $x + 2y - 1 = 0$
- ④ $x + 2y + 1 = 0$ ⑤ $x - 2y - 1 = 0$

해설

$2x + y + 1 = 0$ 을 A (x 축 대칭) 하면 $2x - y + 1 = 0$
 B (y 축 대칭) 하면 $-2x - y + 1 = 0$
 C (원점 대칭) 하면 $2x + y + 1 = 0$ 이므로
 $A \rightarrow B \rightarrow C$, $C \rightarrow B \rightarrow A$ 에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
 $2x + y + 1 = 0$ 을 D (직선 $y = x$ 대칭) 하면 $2y + x + 1 = 0$
 $\therefore x + 2y + 1 = 0$

32. 점 P를 x 축에 대해 대칭이동하고, x 축 방향으로 -2 만큼, y 축 방향으로 3 만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y) 라 할 때, $x + y$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$P(a, b)$ 를 x 축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
 x 축으로 -2 만큼, y 축으로 3 만큼 평행이동
 $\Rightarrow (a - 2, -b + 3)$
 $y = -x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b - 3, -a + 2)$
다시 점P와 일치하므로
 $b - 3 = a, -a + 2 = b$ 에서
 $a - b = -3 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉠}$
 $a + b = 2 \quad \cdots \cdots \textcircled{㉡}$

$\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 을 연립하여 풀면, $a = -\frac{1}{2}, b = \frac{5}{2}$

$\therefore P\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

33. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x - 1)^2 + (y - a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0 (x \text{ 축 대칭이동})$$

$$\Rightarrow y - 2x - 3 = 0 (y = x \text{ 대칭이동})$$

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$$\therefore a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore a = 5$$

34. 두 점 A(4, 1), B(5, 1) 을 직선 $x - y + 1 = 0$ 에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

- ① 3
- ② $\frac{9}{2}$
- ③ $\frac{22}{3}$
- ④ 9
- ⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 A(4, 1)의 대칭점을 C(a, b)라 하면 $\overline{AC}$ 의 중점 $M\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ 이 직선 $x - y + 1 = 0$ 에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+4}{2} - \frac{b+1}{2} + 1 = 0$$

$\therefore a - b + 5 = 0 \cdots \textcircled{1}$

또 직선 AC는 직선 $x - y + 1 = 0$ 에 수직이므로

$$\frac{b' - 1}{a - 4} \times 1 = -1$$

$\therefore a + b - 5 = 0 \cdots \textcircled{2}$

①, ②를 연립하면 $a = 0, b = 5$

$\therefore C(0, 5)$

같은 방법으로 점 B(5, 1)의 대칭점 D(0, 6)이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2} \times 5 \times 5 - \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = \frac{9}{2}$

35. 두 점 A (1,3), B (4,1) 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 A (1,3) 을 x 축에 대하여 대칭이동한 점을 A' 이라 하면
A' (1,-3)
이 때, 다음 그림에서
 $\overline{AP} = \overline{A'P}$
또, $\overline{AP} + \overline{BP} = \overline{A'P} + \overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로
 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은
 $\overline{A'B} = \sqrt{(4-1)^2 + \{1-(-3)\}^2} = 5$