1. 다음 연립부등식을 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하여라.

$$\begin{cases} \dfrac{2x+4}{3} \geq \dfrac{x-2}{2} - x \\ 0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3 \\ 1.2x - \dfrac{1}{2} < 0.8x + \dfrac{3}{5} \end{cases}$$

▶ 답: ＿＿＿＿ 개

▷ 정답: 2 개

해설

$\dfrac{2x+4}{3} \geq \dfrac{x-2}{2} - x$ 의 양변에 6 을 곱하면 $2(2x+4) \geq 3(x-2) - 6x$,

$4x + 8 \geq 3x - 6 - 6x$,

$x \geq -2$

$0.3(2x-3) \leq 0.2(x+6) + 0.3$ 의 양변에 10 을 곱하면 $3(2x-3) \leq 2(x+6) + 3$,

$6x - 9 \leq 2x + 12 + 3$,

$x \leq 6$

$1.2x - \dfrac{1}{2} < 0.8x + \dfrac{3}{5}$ 의 양변에 10 을 곱하면

$12x - 5 < 8x + 6$,

$4x < 11$,

$x < \dfrac{11}{4}$

연립부등식의 해는 $-2 \leq x < \dfrac{11}{4}$ 이고 속하는 자연수는 $1, 2$ 의 2 개이다.

2. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=$ (㉠) 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=$ (㉠) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다.
> x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=$ (㉢) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

3. 두 부등식 $0.7 - x \leq -2 - 0.1x$, $\dfrac{2+x}{3} \geq x + a$의 공통 부분이 없을 때, a의 값 중 가장 작은 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -1

해설

$0.7 - x \leq -2 - 0.1x7 - 10x \leq -20 - x - 9x \leq -27,\ \ x \geq 3$

$\dfrac{2+x}{3} \geq x + a2 + x \geq 3x + 3a - 2x \geq 3a - 2,\ \ x \leq 1 - \dfrac{3}{2}a$

공통 부분이 없으므로 $1 - \dfrac{3}{2}a < 3$,

$-\dfrac{3}{2}a < 2$

$\therefore\ \ a > -\dfrac{4}{3}$

따라서 가장 작은 정수 a의 값은 -1이다.

4. $a-1<x<a+1$을 만족하는 모든 x가 $-1<x<3$을 만족할 때, 상수 a의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0 \le a \le 2$ ③ $a<0,\ a>2$

④ $a \le 0,\ a \ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1 \ge -1$ 이고, $a+1 \le 3$ 이어야 하므로

$a \ge 0,\ a \le 2$

$\therefore\ 0 \le a \le 2$

5. 연속하는 세 정수의 합이 30 보다 크고 36 보다 작을 때, 세 정수 중 가운데 정수를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 11

해설

연속한 세 정수 $x-1,\ x,\ x+1$

$30 < (x-1) + x + (x+1) < 36$

$30 < 3x < 36$

$10 < x < 12$

$\therefore x = 11$

6. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$　② $-1 \le x \le 1$　③ $x \ge 1$

④ 해는 없다.　⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2)$, $x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2$, $x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

7. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 이차부등식 $2[x]^2-[x]-6<0$의 해를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$　② $x \le -1$　③ $x \ge 1$

④ $x \le 1$　⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2-[x]-6<0$에서

$([x]-2)(2[x]+3)<0$

$\therefore -\dfrac{3}{2}<[x]<2$

$-1 \le [x] < 2 \quad \therefore -1 \le x < 2$

8. 함수 $f(x)=(x^2+2ax+3)^2+(x^2+2ax+3)-6$ 일 때, 모든 실수 x 에 대하여 $f(x)\geq 0$ 이 성립하는 실수 a 의 값의 범위는?

① $-1\leq a\leq 1$ ② $-1<a\leq 0$ ③ $-1<a<0$

④ $0\leq a<1$ ⑤ $0<a\leq 1$

해설

$x^2+2ax+3=t$ 로 놓으면

$t^2+t-6\geq 0,\ (t+3)(t-2)\geq 0$

$\therefore\ t\leq -3$ 또는 $t\geq 2$

(i) $t\leq -3$, 즉 $g(x)\leq -3$ 일 때

$x^2+2ax+3\leq -3$ 에서 $x^2+2ax+6\leq 0$

$y=x^2+2ax+6$ 의 그래프는

아래로 볼록한 포물선이므로

모든 실수 x 에 대하여 성립하지 않는다.

(ii) $t\geq 2$, 즉 $g(x)\geq 2$ 일 때

$x^2+2ax+3\geq 2$ 에서 $x^2+2ax+1\geq 0$

이 부등식이 모든 실수 x 에 대하여 성립해야 하므로 이차방정식

$x^2+2ax+1=0$ 의 판별식을 D 라 하면

$$\frac{D}{4}=a^2-1\leq 0 \quad \therefore\ -1\leq a\leq 1$$

(i), (ii) 에서 $-1\leq a\leq 1$

9. 부등식 $5-x>2|x+1|$의 해와 $ax^2+bx+7>0$의 해가 같도록 상수 a, b의 값을 정할 때, $a+b$의 값은?

① -7 ② -5 ③ 5 ④ 7 ⑤ 0

해설

$5-x>2|x+1|$ 을 풀면

(ⅰ) $x \geq -1$ 일 때

$5-x>2x+2$, $x<1$ $\therefore -1 \leq x < 1$

(ⅱ) $x<-1$ 일 때

$5-x>-2x-2$, $x>-7$ $\therefore -7<x<-1$

(ⅰ), (ⅱ)에 따라 $-7<x<1$

$ax^2+bx+7>0 \Leftrightarrow -7<x<1$ 이므로 $a<0$ 이고

$ax^2+bx+7=a(x+7)(x-1)$

계수를 비교하면

$a=-1, b=-6$ $\therefore$ $a+b=-7$

10. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

11. 두 부등식 $x^2 - x - 2 > 0$, $x^2 - (a-3)x - 3a < 0$를 동시에 만족하는 정수가 -2뿐일 때, a의 값의 범위를 구하면 $m < a \le n$이다. mn의 값을 구하시오.

▶ 답 :

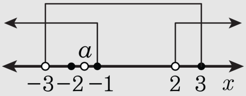
▷ 정답 : -6

해설

$x^2 - x - 2 > 0$에서 $x < -1$, $x > 2$

$x^2 - (a-3)x - 3a < 0$에서

$(x+3)(x-a) < 0$



그림에서와 같이 동시에 만족하는
정수값이 -2뿐이려면 $-2 < a \le 3$이다.

$\therefore$ $-2 < a \le 3$

12. 이차방정식 $x^2-2ax+a+2=0$의 두 근이 모두 1보다 클 때 실수 a의 값의 범위는?

① $0 \le a < 1$
② $1 \le a < 2$
③ $2 \le a < 3$
④ $3 \le a < 4$
⑤ $4 \le a < 5$

해설

$f(x)=x^2-2ax+a+2=(x-a)^2-a^2+a+2$

i) $D/4=a^2-a-2\ge 0,\quad a\le -1 \; or \; a\ge 2$

ii) $f(1)=1-2a+a+2>0 \quad \therefore a<3$

iii) 대칭축 $x=a>1$

i), ii), iii)에서 $2\le a<3$

13. 이차방정식 $x^2-2x+k=0$ 의 두 근이 각각 0 과 1 및 1과 2사이에 있도록 k값의 범위를 구하면?

① $k<0$, $k>1$　② $k\le 0$, $k\ge 2$　③ $0<k<1$

④ $0\le k\le 1$　⑤ $0<k<2$

해설

$x^2-2x+k=f(x)$라 하면

$f(0)>0, f(1)<0, f(2)>0$

$\therefore k>0, k<1$

$\therefore 0<k<1$

14. 이차방정식 $x^2+2kx+k=0$의 두 근이 모두 -1과 1사이에 있기 위한 k값의 범위가 $a<k\le b$라 할 때, ab의 값은?

① -1 ② $-\frac{1}{2}$ ③ 0 ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

$D/4=k^2-k\ge 0, k(k-1)\ge 0,\ \therefore\ k\le 0,\quad k\ge 1$

$f(x)=x^2+2kx+k$라 하면

$f(-1)=1-k>0$

$\therefore\ k<1$

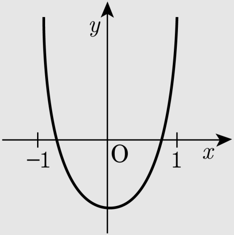
$f(1)=1+3k>0\ \therefore\ k>-\frac{1}{3}$

대칭축 $x=-k$ 이므로 $-1<-k<1$

$\therefore\ -1<k<1$

$\therefore -\frac{1}{3}<k\le 0$

$\therefore\ ab=0$



15. 평면 위에 세 점 $A(0,\ a)$, $B(2,\ 3)$, $C(1,\ 0)$ 에 대하여 $\triangle ABC$ 가 이등변삼각형이 되도록 하는 모든 a의 값의 합은?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 11

해설

$\overline{AB}^2 = (0-2)^2 + (a-3)^2 = a^2 - 6a + 13$

$\overline{BC}^2 = (2-1)^2 + (3-0)^2 = 10$

$\overline{AC}^2 = (0-1)^2 + (a-0)^2 = a^2 + 1$

1) $\overline{AB} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 - 6a + 13 = 10$ 즉 $a^2 - 6a + 3 = 0$

$\therefore\ a = 3 \pm \sqrt{6}$

2) $\overline{AC} = \overline{BC}$ 일 때, $\overline{AC}^2 = \overline{BC}^2$ 에서

$a^2 + 1 = 10$ 즉 $a^2 = 9$

$\therefore\ a = \pm 3$

3) $\overline{AC} = \overline{AB}$ 일 때, $\overline{AC^2} = \overline{AB^2}$ 에서

$a^2 + 1 = a^2 - 6a + 13$ 즉 $6a = 12$

$\therefore\ a = 2$

$a = -3$ 이면 세 점 A, B, C는 일직선 상에 있으므로 구하는 a의 값의 합은

$(3 + \sqrt{6}) + (3 - \sqrt{6}) + 3 + 2 = 11$

16. $(0, 0)$, $(0, 4)$, $(4, 4)$와 $(4, 0)$을 꼭짓점으로 하는 정사각형을 생각하자. $(0,\ 1)$에서 출발하여 윗변과 밑변으로 반사시켜 $(4, 2)$에 도달하는 꺾인 직선을 그리려면 윗변의 어느 점을 지나야 하는가? (단, 입사각과 반사각은 같다)

① $(1,\ 4)$　② $\left(\frac{10}{7},\ 4\right)$　③ $\left(\frac{5}{3},\ 4\right)$

④ $\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$　⑤ $\left(\frac{3}{2},\ 4\right)$

해설

대칭성을 이용하여 $(0, 1)$과 $(4, 10)$을 연결하는 직선과 $y = 4$와의 교점을 계산하면 된다.

$$\begin{cases} y = \frac{9}{4}x + 1 \\ y = 4 \end{cases} \quad \therefore\ x = \frac{4}{3}$$

따라서, $\left(\frac{4}{3}, 4\right)$를 지난다.

17. 세 꼭짓점이 A$(-1,\ -1)$, B$(4,\ 3)$, C$(0,\ 1)$인 $\triangle$ABC 에서 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$, $\overline{\mathrm{CA}}$를 $2:3$으로 내분하는 점을 각각 D, E, F라 하자. $\triangle$DEF 의 무게중심을 $(a,\ b)$라 할 때, $a+b$의 값은?

① -2　　② -1　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

$\triangle$ABC 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle$ABC 의 무게중심과 일치한다.
$\triangle$ABC 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3},\ \frac{-1+3+1}{3}\right),$$

즉 $(1,\ 1)$ 이므로 $\triangle$DEF 의 무게중심은 $(1,\ 1)$ 이다.
$\therefore\ a+b=1+1=2$

18. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1, 8), (-4, -2), (10, 2)$ ② $(0, 8), (4, 2), (10, 0)$

③ $(-1, 8), (4, 2), (10, 0)$ ④ $(-1, -8), (4, -2), (10, -2)$

⑤ $(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 로 놓으면,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2,\ \frac{x_2 + x_3}{2} = 3,\ \frac{x_3 + x_1}{2} = 5$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = -4,\quad x_2 + x_3 = 6,\quad x_3 + x_1 = 10$$

$$\therefore\ x_1 = 0,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3,\ \frac{y_2 + y_3}{2} = -1,\ \frac{y_3 + y_1}{2} = 4$$

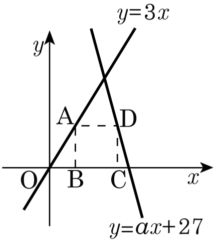
$$\therefore\ y_1 + y_2 = 6,\quad y_2 + y_3 = -2,\quad y_3 + y_1 = 8$$

$$\therefore\ y_1 = 8,\quad y_2 = -2,\ y_3 = 0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$ 이다.

19. 다음 그림과 같이 좌표평면 위에 한 변의 길이가 3인 정사각형 ABCD가 있다. 일차함수 $y=3x$ 의 그래프가 점 A 를 지나고, 일차함수 $y=ax+27$ 의 그래프가 점 D를 지날 때, 기울기 a 의 값은? (단, 두 점 B, C는 x축 위의 점이다.)



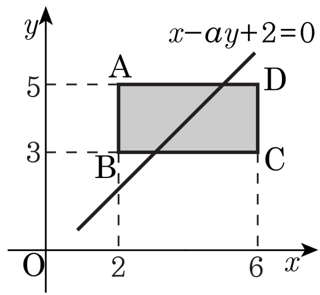
① -4　② $-\frac{9}{2}$　③ -5

④ $-\frac{11}{2}$　⑤ -6

해설

$\overline{AB}=3$ 이므로 점 A 의 y 좌표는 3 이고,
점 A는 일차함수 $y=3x$ 의 그래프 위의 점이므로 x 좌표가 1 이다.
점 A와 x 좌표가 같은 점 B의 좌표는 $(1,\ 0)$ 이고, $\overline{BC}=3$ 이므로 점 C의 좌표는 $(4,\ 0)$ 이다.
점 C 와 x 좌표가 같고, 점 A 와 y 좌표가 같은 점 D 의 좌표는 $(4,\ 3)$ 이다.
점 D가 일차함수 $y=ax+27$ 위의 점이므로 $x=4,\ y=3$를 대입하면 $3=a\times4+27$
$\therefore\ a=-6$

20. 다음 그림에서 □ABCD 의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $x-ay+2=0$ 일 때, 상수 a 의 값은?



① $\frac{1}{3}$　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{3}{2}$　⑤ 2

해설

직사각형의 넓이를 이등분하려면 직사각형의 대각선의 교점을 지나야 한다.

두 대각선의 교점의 좌표는 $\left(\frac{2+6}{2},\ \frac{3+5}{2}\right)$

즉 $(4, 4)$ 이다.

직선 $x-ay+2=0$ 이 점 $(4, 4)$ 를 지나야 한다.

따라서 $(4, 4)$ 를 대입하면 $4-4a+2=0$

$\therefore\ a=\frac{3}{2}$

21. 두 직선 $y=ax$와 $y=bx$가 서로 수직이고, 직선 $x=2$와 만나는 두 점을 P, Q라 할 때, P, Q의 중점이 $\left(2, \frac{3}{2}\right)$이다. 이때, $|a-b|$의 값은? (단, $a>0$, $b<0$)

① 1　② 2　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{2}$　⑤ 4

해설

$\mathrm{P}(2, 2a)$, $\mathrm{Q}(2, 2b)$

$\therefore$ P, Q의 중점 : $\left(\frac{2+2}{2}, \frac{2a+2b}{2}\right)=\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$\Rightarrow\ a+b=\frac{3}{2}\ \cdots$ ㉠

$y=ax$와 $y=bx$가 서로 수직이므로

$a\times b=-1\ \cdots$ ㉡

$\therefore\ (a+b)^2=(a-b)^2+4ab$이므로

$(a-b)^2=\frac{9}{4}+4$

$\Rightarrow\ a-b=\frac{5}{2}\ (\because\ a>0,\ b<0)$

22. 다음 세 직선이 삼각형을 만들 수 있기 위한 k 의조건은?

$$3x+y+2=0,\ \ x+3y+k=0,\ \ 2x-y+3=0$$

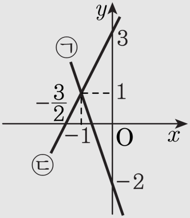
① $k \neq -2$　② $k \neq -3$　③ $k \neq -4$

④ $k \neq -7$　⑤ $k \neq -11$

해설

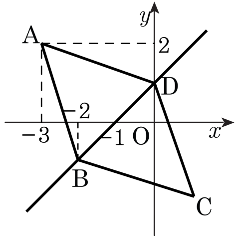
$3x+y+2=0 \cdots$ ㉠
$x+3y+k=0 \cdots$ ㉡ 일 때,
$2x-y+3=0 \cdots$ ㉢

다음 그림과 같이
세 직선이 삼각형을 만들려면 평행한 직선이 없어야 하고 세 직선이 한 점에서 만나지 않아야 한다.



㉠, ㉡, ㉢ 중에 어느 두 직선도 평행하지 않으므로 세 직선이 한 점에서 만나지 않을 조건을 구한다.
㉠과 ㉢을 연립하여 교점의 좌표를 구하면$(-1,\ 1)$ 이다.
이 점을 ㉡에 대입했을 때 등식이 성립하지 않아야 하므로 $-1+3+k \neq 0$,　$\therefore\ k \neq -2$

23. 다음 그림에서 점 B 와 점 D 를 지나는 직선의 x 절편이 -1 이고 $\mathrm{A}(-3,\ 2)$ 일 때, 마름모 ABCD 의 넓이를 구하면?



▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

대각선 BD 의 중점은 $\mathrm{M}(-1,\ 0)$, 사각형 ABCD 가 마름모이므로

$\overline{\mathrm{AM}} \perp \overline{\mathrm{BD}}$,

$\overline{\mathrm{AM}}$ 의 기울기가 -1 이므로

$\overline{\mathrm{BD}}$ 의 기울기는 1,

점 B 와 점 D 의 y값을 a, b라 하면

$b-a=2,\ \dfrac{a+b}{2}=0$ 이므로 $a=-1,\ b=1$ 이다.

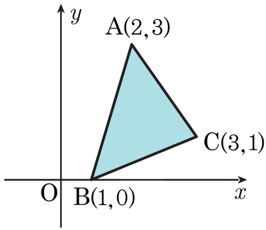
$\therefore\ \mathrm{D}(0,\ 1)$

$\overline{\mathrm{AM}}=2\sqrt{2},\ \overline{\mathrm{MD}}=\sqrt{2}$ 이므로

마름모 ABCD 의 넓이는

$$4\left(\frac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{2}\right)=8$$

24. 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 아래 그림의 삼각형 ABC 를 지나기 위한 m 의 범위는?

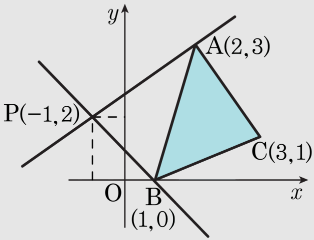


① $-1 \le m \le 3$　② $-1 \le m \le \frac{1}{3}$

③ $-\frac{1}{3} \le m \le 1$　④ $-\frac{1}{3} \le m \le 3$

⑤ $1 \le m \le 3$

해설



직선 $y = -mx - m + 2$ 에서 $mx + y + m - 2 = 0$

$m(x+1) + y - 2 = 0$ 이므로

점 P$(-1,\ 2)$ 를 반드시 지난다.

따라서 직선 $y = -mx - m + 2$ 가 $\triangle$ABC 를 지나기 위한 기울기 $-m$ 의 범위는

(직선 PB 의 기울기) $\le -m \le$ (직선 PA 의 기울기)

직선 PB 의 기울기는 $\frac{2-0}{-1-1} = -1$

직선 PA 의 기울기는 $\frac{2-3}{-1-2} = \frac{1}{3}$

$-1 \le -m \le \frac{1}{3}$

$\therefore\ -\frac{1}{3} \le m \le 1$

25. 서로 다른 두 직선 $2x-ay-2=0$, $x-(a-3)y-3=0$이 평행할 때, 두 직선 사이의 거리를 구하면?

① $\dfrac{\sqrt{6}}{5}$ ② $\dfrac{\sqrt{7}}{5}$ ③ $\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$ ④ $\dfrac{3}{5}$ ⑤ $\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

해설

$\begin{cases} 2x-ay-2=0 \\ x-(a-3)y-3=0 \end{cases}$ 정리하면

$\begin{cases} y=\dfrac{2}{a}x-\dfrac{2}{a} \\ y=\dfrac{1}{a-3}x-\dfrac{3}{a-3} \end{cases}$ 평행하므로

$\dfrac{2}{a}=\dfrac{1}{a-3}$

$\therefore\ a=6$ 대입하면

$\begin{cases} x-3y-1=0 \\ x-3y-3=0 \end{cases}$

$x-3y-1=0$위의 점 $(1,\ 0)$과 $x-3y-3=0$과의 거리는

$\therefore\ \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+3^2}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{10}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$

26. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$$\left(\because \ \sqrt{2k^2+6k+5}\right.$$

$$\left.=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$$

27. 원 $x^2+y^2=1$과 직선$ax+by+c=0$에 대하여 다음 <보기> 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, a, b, c 는 모두 양수이고 $b \geq a$)

보기

㉠ $c=b$이면 두 점에서 만난다.

㉡ $c=2b$이면 만나지 않는다.

㉢ $c=\sqrt{a^2+b^2}$이면 한 점에서 만난다.

① ㉠　② ㉠, ㉡　③ ㉠, ㉢

④ ㉡, ㉢　⑤ ㉠, ㉡, ㉢

해설

원의 중심이 $(0,\ 0)$이므로 원의 중심에서 직선 $ax+by+c=0$ 에 이르는 거리를 d라 하면

$$d=\frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

㉠ $d=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}<1$ 그러므로 교점은 2개다.

즉, $n(A\cap B)=2$

㉡ $d=\dfrac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}} \geq \dfrac{2b}{\sqrt{2}b}>1$ ($\because\ b \geq a$)

그러므로 교점은 없다.

㉢ $d=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$

그러므로 교점은 1 개다.

따라서 ㉠, ㉡, ㉢ 모두 참이다.

28. 반지름이 20인 원의 내부에 중심으로부터 12만큼 떨어져 있는 점 P가 있다. 점 P를 지나고 길이가 정수인 현의 갯수를 구하여라.

▶ 답 : ______개

▷ 정답 : 16개

해설

점 P를 지나는 가장 긴 현은 지름 AB이고, 가장 짧은 현은 지름에 수직인 현CD이다.

$\overline{CD} = 2\sqrt{20^2 - 12^2} = 32,\ \overline{AB} = 40$

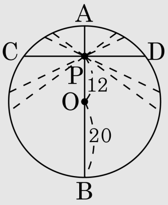
점 P를 중심으로 현을 회전시키면 32와 40사이에 모든 실수 길이의 현이 두 번씩 나타난다.

따라서 길이가 정수인 현은

32, 40인 것이 한 개,

33, 34, 35, 36, 37, 38, 39인 것이 각각 두 개씩 있다.

$\therefore$ 16개



29. 다음 두 원의 공통접선의 방정식을 구하면?

$$x^2 + y^2 = 16, \quad x^2 + (y-5)^2 = 9$$

① $y = \pm\sqrt{6}x + 10$

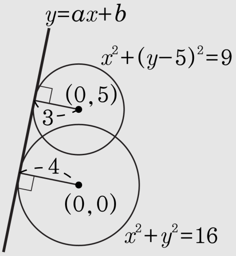
② $y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

③ $y = \pm 3\sqrt{6}x + 30$

④ $y = \pm 4\sqrt{6}x + 40$

⑤ $y = \pm 5\sqrt{6}x + 50$

해설



$x^2 + y^2 = 16 \cdots\cdots$ ㉠,
$x^2 + (y-5)^2 = 9 \cdots\cdots$ ㉡
공통접선의 방정식을
$y = ax + b \cdots\cdots$ ㉢ 로 놓는다.
이때, 원 ㉠과 직선 ㉢이 접하므로

$$\frac{|b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 4$$

$\therefore |b| = 4\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉣
또, 원 ㉡과 직선 ㉢도 접하므로

$$\frac{|-5+b|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3$$

$\therefore |b-5| = 3\sqrt{a^2+1} \cdots\cdots$ ㉤
그런데 $b \neq 0$ 이므로 ㉤ ÷ ㉣을 하면

$$\frac{|b-5|}{b} = \frac{3}{4}$$

$4|b-5| = 3|b|, \ 4(b-5) = \pm 3b$

$\therefore b = 20$ 또는 $b = \dfrac{20}{7}$

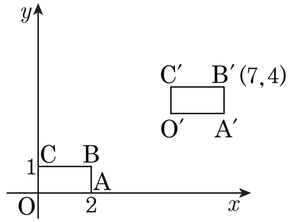
(i) $b = 20$ 일 때, ㉣에서 $\sqrt{a^2+1} = 5$
$\therefore a = \pm 2\sqrt{6}$

(ii) $b = \dfrac{20}{7}$ 일 때, ㉣에서

$\sqrt{a^2+1} = \dfrac{5}{7}$ 이고,

이것을 만족하는 실수 a 는 없다.
(i), (ii) 로부터 $a = \pm 2\sqrt{6}, b = 20$ 이므로
구하는 공통접선의 방정식은
$y = \pm 2\sqrt{6}x + 20$

30. 좌표평면에서 원점 O 와 두 점 A(2, 0), C(0, 1) 에 대하여 $\overline{OA}, \overline{OC}$ 를 두 변으로 하는 직사각형 OABC 를 평행 이동하여 O → O′, A → A′, B → B′, C → C′ 으로 옮겨지도록 하였다. 점 B′ 의 좌표가 (7, 4) 일 때, 직선 A′C′ 의 방정식은?



① $x + 2y - 10 = 0$　　② $x + 2y - 13 = 0$

③ $x + 2y - 16 = 0$　　④ $2x + 3y - 17 = 0$

⑤ $2x + 3y - 19 = 0$

해설

점 B(2,1) 이 점 B′(7,4) 로 옮겨지므로
직사각형 O′A′B′C′ 은 직사각형 OABC 를
x 축의 방향으로 5, y 축의 방향으로 3만큼 평행 이동한 것이다.
따라서 두 점 A(2,0), C(0,1) 은 각각 A′(7,3), C′(5,4) 로 옮겨지므로

직선 A′C′ 의 방정식은 $y - 3 = \frac{4-3}{5-7}(x-7)$

$\therefore\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

해설

직선 A′C′ 은 직선 AC 를 평행이동한 것이므로

직선 A′C′ 의 기울기는 직선 AC 의 기울기인 $-\frac{1}{2}$ 이다.

한편, $\overline{AB} = \overline{A'B'} = 1$ 에서 점 A′ 의 좌표는 (7,3) 이므로

이것을 $y = -\frac{1}{2}x + b$ 에 대입하여 정리하면 $b = \frac{13}{2}$ 이다.

따라서 구하는 직선 A′C′ 의 방정식은

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{13}{2}$,

$\therefore\ x + 2y - 13 = 0$

31. 방정식 $f(x,\ y)=0$이 나타내는 도형을 x축에 대하여 대칭이동시키는 것을 A, y축에 대하여 대칭 이동시키는 것을 B, 원점에 대하여 대칭 이동시키는 것을 C, 직선 $y=x$에 대하여 대칭 이동시키는 것을 D라 하자. 직선 $2x+y+1=0$을 $A \to B \to C \to D \to C \to B \to A$의 순서로 대칭 이동시킨 도형의 방정식은? (단, $A \to B$는 A에 의하여 대칭 이동시킨 후 다시 B에 의하여 대칭 이동시키는 것을 뜻한다.)

① $2x+y+1=0$ ② $2x+y-1=0$ ③ $x+2y-1=0$
④ $x+2y+1=0$ ⑤ $x-2y-1=0$

해설

$2x+y+1=0$을 A(x축 대칭)하면 $2x-y+1=0$
B(y축 대칭)하면 $-2x-y+1=0$
C(원점 대칭)하면 $2x+y+1=0$이므로
$A \to B \to C,\ \ C \to B \to A$에 의하여 도형은 자기 자신으로 옮겨진다.
$2x+y+1=0$을 D(직선 $y=x$ 대칭)하면 $2y+x+1=0$
$\therefore\ x+2y+1=0$

32. 점 P 를 x축에 대해 대칭이동하고, x축 방향으로 -2만큼, y축 방향으로 3만큼 평행이동한 후, 다시 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이동하였더니 점 P와 일치하였다. 점 P의 좌표를 (x, y)라 할 때, $x+y$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

P(a, b)를 x축에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (a, -b)$,
x축으로 -2만큼, y축으로 3만큼 평행이동
$\Rightarrow (a-2, -b+3)$
$y=-x$ 에 대해 대칭이동 $\Rightarrow (b-3, -a+2)$
다시 점P와 일치하므로
$b-3=a, -a+2=b$ 에서
$a-b=-3$ $\cdots\cdots$ ㉠
$a+b=\ \ 2$ $\cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면, $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2}$
$\therefore\ \mathrm{P}\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

33. 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore \ a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore \ a = 5$

34. 두 점 $\mathrm{A}(4,1), \mathrm{B}(5,1)$ 을 직선 $x-y+1=0$에 대하여 대칭이동시킨 점을 각각 C, D라 할 때, 사각형 ABCD의 넓이는?

① 3　② $\frac{9}{2}$　③ $\frac{22}{3}$　④ 9　⑤ $\frac{33}{2}$

해설

점 $\mathrm{A}(4,1)$ 의 대칭점을 $\mathrm{C}(a,b)$ 라 하면 $\overline{\mathrm{AC}}$ 의 중점

$\mathrm{M}\left(\frac{a+4}{2}, \frac{b+1}{2}\right)$ 이 직선 $x-y+1=0$ 위에 있으므로 대입하면

$$\frac{a+4}{2}-\frac{b+1}{2}+1=0$$

$\therefore a-b+5=0 \quad \cdots ①$

또 직선 AC는 직선 $x-y+1=0$에 수직이므로

$$\frac{b'-1}{a-4}\times 1=-1$$

$\therefore a+b-5=0 \quad \cdots ②$

①, ②를 연립하면 $a=0,\ b=5$

$\therefore \mathrm{C}(0,5)$

같은 방법으로 점 $\mathrm{B}(5,1)$ 의 대칭점 $\mathrm{D}(0,6)$ 이다.

따라서 사각형 ABCD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times 5\times 5-\frac{1}{2}\times 4\times 4=\frac{9}{2}$

35. 두 점 $A(1,3)$, $B(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $A(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$A'(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{AP}=\overline{A'P}$
또, $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP}\geq\overline{A'B}$ 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$