**1.** 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x+5y < 5 \\ -2 < 2x+7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$ 중 $x+y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M+2m$의 값을 구하면?

① $-9$ ② $-13$ ③ $-18$ ④ $-22$ ⑤ $-26$

해설

$1 < x+5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면
$-10 < -2x-10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x+7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ + ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, $y$는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 $x$의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x+y$의 최댓값은$-3+1 = -2$이고,
최솟값은$-11+3 = -8$이다.
$\therefore M = -2,\ m = -8\ \ \therefore\ M+2m = -18$

**2.** 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 $x$, $y$ 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

> [풀이]
> $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 $y$ 에 대해서 정리하면 $y=$ ( ㉠ ) 이 된다.
> $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 $y$ 대신 $y=$ ( ㉠ ) 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다.
> 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 $x$ 는 ( ㉡ ) 이 된다.
> $x$ 값을 ( ㉠ ) 에 대입하면 $y=$ ( ㉢ ) 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ $-1$

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 $y$ 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 $y$ 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면
$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 $x$ 는 $-1$ 이 된다.
$x$ 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

**3.** 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 권

▷ 정답 : 9권

해설

500 원 하는 공책은 $x$ 권 , 800 원 하는 연습장은 $(13-x)$ 권

$7500 \le 500x + 800(13-x) < 8000$

$7500 \le 500x + 10400 - 800x < 8000$

$7500 \le -300x + 10400 < 8000$

$-29 \le -3x < -24$

$8 < x \le \frac{29}{3}$

그러므로 9권

**4.** 8% 의 소금물 200 g 이 있다. 여기에 $x$ g 의 소금을 섞어서 10% 이상 20% 미만의 농도를 만들려고 한다. $x$ 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{40}{9} \le x < 30$

해설

8% 의 소금물 200 g 의 소금의 양은

$\frac{8}{100} \times 200 = 16\,(\mathrm{g})$ 이다.

따라서 소금 $x$ g 을 추가하였을 때의 농도를 나타내면 $\frac{16+x}{200+x} \times 100$ 이다.

이 값이 10% 이상 20% 미만이므로,

$10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 \\ \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge \frac{40}{9} \\ x < 34 \end{cases}$$

이다. 따라서 $x$ 의 범위는 $\frac{40}{9} \le x < 30$ 이다.

**5.** 구슬을 보관함 1상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면?

① 4 상자　　② 5 상자　　③ 6 상자

④ 7 상자　　⑤ 8 상자

**해설**

보관함 $x$상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

**6.** 부등식 $x^2 + ax + a + 3 \leq 0$를 만족하는 $x$가 오직 1개이기 위한 양수 $a$가 존재하는 구간은?

① $1 < a < 3$　② $2 < a < 5$　③ $3 < a < 6$

④ $4 < a < 7$　⑤ $6 < a < 7$

해설

$x^2 + ax + a + 3 \leq 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2 + ax + a + 3 = 0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned} \therefore D &= a^2 - 4(a+3) \\ &= a^2 - 4a - 12 \\ &= (a-6)(a+2) = 0 \end{aligned}$$

$\therefore a = 6 \ (\because a > 0)$

**7.** 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 $x,\ y$ 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하면?

$|x^2-2x| = y-1$ $\cdots\cdots$ ㉠
$y \le x+1$ $\cdots\cdots$ ㉡

① 1 개　② 2 개　③ 3 개　④ 4 개　⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2-2x|+1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2-2x| \le x$
( i ) $x^2-2x \ge 0$ $(x \le 0,\ x \ge 2)$ 일 때
$x^2-2x \le x$
$\therefore\ x(x-3) \le 0$
$\therefore\ 0 \le x \le 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x=0,\ 2 \le x \le 3$
( ii ) $x^2-2x < 0$ $(0 < x < 2)$ 일 때
$-(x^2-2x) \le x$
$\therefore\ x(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le 0,\ x \ge 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \le x < 2$
( i ), ( ii ) 에서 정수 $x$를 구하면 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
$x$의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1,\ 2,\ 1,\ 4$
구하는 순서쌍$(x,\ y)$는
$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3, 4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

**8.** 임의의 실수 $x, y$에 대하여 부등식 $x^2+4xy+4y^2+10x+ay+b>0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 $a$, $b$의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b<25$ ② $a=20,\ 0<b<25$

③ $a=20,\ b>25$ ④ $0<a<20,\ b>25$

⑤ $0<a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

$x$에 대한 내림차순으로 정리한다

$\Rightarrow\ \ x^2+2(2y+5)+4y^2+ay+b>0$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$D'=(2y+5)^2-(4y^2+ay+b)<0$

$\Rightarrow\ \ (20-a)y+25-b<0$

임의의 $x,\ y$에 대해 성립하려면, $a=20,\ \ b>25$

**9.** $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$ ② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$ ④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ $b$ 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로
$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta),\ a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a},\ \alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

**10.** 좌표평면 위에서 모든 실수 $x$ 에 대하여 직선 $y = 2(kx+1)$ 이 곡선 $y = -(x-2)^2 + 1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 $k$ 의 값을 정할 때, 다음 중 $k$ 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 0　　⑤ $-1$

해설

임의의 실수 $x$ 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2 + 1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 $k$ 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2 + 2(k-2)x + 5 > 0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여
$\frac{D}{4} = (k-2)^2 - 5 < 0$
$\Rightarrow\ k^2 - 4k - 1 < 0$
$\therefore\ 2 - \sqrt{5} < k < 2 + \sqrt{5}$
이 때, 0, 1, 2, 3 은 $k$ 의 값의 범위에 속하나
$-1$ 은 속하지 않는다.

**11.** 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$　② $-2 < x < 3$　③ $2 \leq x < 3$
④ $2 < x \leq 3$　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

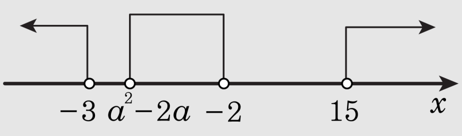
$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$에서
$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$
$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$
$x^2 + 1 > 0$이므로 $x - 2 \geq 0$
$\therefore x \geq 2 \cdots$ ㈎
$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x-3)(x+2) < 0$
$\therefore -2 < x < 3 \cdots$ ㈏
따라서 ㈎, ㈏의 공통 범위를 구하면
$2 \leq x < 3$이다.

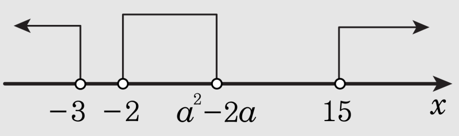
**12.** 연립부등식 $\begin{cases} x^2-12x-45>0 \\ (x+2)(x-a^2+2a)<0 \end{cases}$ 을 만족하는 $x$의 값이 존재하지 않을 때, 정수 $a$의 개수는?

① 6　② 7　③ 8　④ 9　⑤ 10

해설

$x^2-12x-45>0$에서
$(x+3)(x-15)>0$
$\therefore x<-3$ 또는 $x>15 \cdots$ ㉠
$(x+2)\{x-(a^2-2a)\}<0 \cdots$ ㉡




$-3 \le a^2-2a \le 15$이면서
부등식 ㉠, ㉡를 동시에 만족하는
$x$은 존재하지 않는다.

(ⅰ) $-3 \le a^2-2a$에서
$a^2-2a+3=(a-1)^2+2 \ge 0$이므로
모든 실수 $a$에 대하여 항상 성립한다.
(ⅱ) $a^2-2a \le 15$에서
$a^2-2a-15 \le 0$, $(a+3)(a-5) \le 0$
$\therefore -3 \le a \le 5$
따라서 정수 $a$는
$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$

**13.** 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 $\alpha$, $\beta$가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, $a$의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

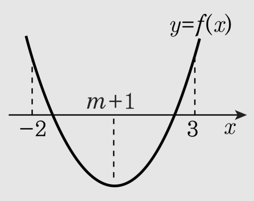
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위: $-2<a<2$

**14.** 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 $-2$와 $3$사이에 있을 때, 정수 $m$의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 2개

해설




$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

( i ) $\frac{D}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

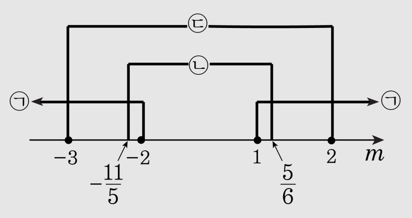
( ii ) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\frac{11}{5}$ ,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\frac{6}{5}$

$\therefore -\frac{11}{5}<m<\frac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



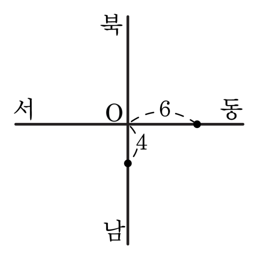

$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\frac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\frac{6}{5}$

따라서, 정수 $m$은 $-2$, $1$두 개다.

**15.** 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?




① 1 시간 후　　② 1.2 시간 후　　③ 1.4 시간 후

④ 1.6 시간 후　　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 $x$ 축, 남북을 $y$ 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 $t$ 시간 후의 A, B 의 좌표는 A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, $t$ 시간 후의 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 거리는 $s$ 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t=\frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

**16.** 두 점 $A(2,\ 5)$ , $B(7,\ -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, $t$ 의 값의 범위는? (단, $0<t<1$ )

① $0<t<\frac{1}{3}$　② $0<t<\frac{3}{5}$　③ $0<t<\frac{5}{6}$
④ $\frac{3}{5}<t<1$　⑤ $\frac{3}{5}<t<\frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore\ P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5}<t<\frac{5}{6}$

이때, $0<t<1$ 이므로 구하는 $t$ 의 값의 범위는

$\therefore\ 0<t<\frac{5}{6}$

**17.** 세 변의 중점의 좌표가 $(-2,3)$, $(3,-1)$, $(5,4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1,8), (-4,-2), (10,2)$
② $(0,8), (4,2), (10,0)$
③ $(-1,8), (4,2), (10,0)$
④ $(-1,-8), (4,-2), (10,-2)$
⑤ $(0,8), (-4,-2), (10,0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각
$(x_1,y_1)$, $(x_2,y_2)$, $(x_3,y_3)$ 로 놓으면,
$\frac{x_1+x_2}{2}=-2,\ \frac{x_2+x_3}{2}=3,\ \frac{x_3+x_1}{2}=5$
$\therefore\ x_1+x_2=-4,\ \ x_2+x_3=6,\ \ x_3+x_1=10$
$\therefore\ x_1=0,\ \ x_2=-4,\ \ x_3=10$
$\frac{y_1+y_2}{2}=3,\ \frac{y_2+y_3}{2}=-1,\ \frac{y_3+y_1}{2}=4$
$\therefore\ y_1+y_2=6,\ \ y_2+y_3=-2,\ \ y_3+y_1=8$
$\therefore\ y_1=8,\ \ y_2=-2,\ y_3=0$
따라서 세 꼭짓점의 좌표는
$(0,8), (-4,-2), (10,0)$ 이다.

**18.** 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$　　② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$　　④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0$ ⋯ ①
$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$ , $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2$ ⋯ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$

**19.** 두 점 $A(3,\ 2)$, $B(a,\ b)$ 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 $2:1$ 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$\frac{b-2}{a-3}=2$, $b-2=2(a-3)$, $b=2a-4 \cdots$ ㉠

$\overline{AB}$를 $2:1$ 로 내분하는 점은

$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$

$\therefore\ a+2b-1=0 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5}$, $b=-\frac{2}{5}$ 이다.

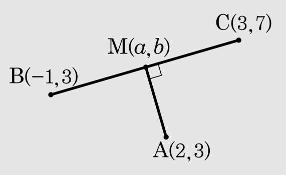
$\therefore\ 3a+b=5$

**20.** 점 A(2, 3) 에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M($a$, $b$) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7　　② 9　　③ 11　　④ 13　　⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.




즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2)$,　 $\therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$ , $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

**21.** 다음 두 직선 $2x+y-2=0$, $mx-y-3m+5=0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 $m$ 의 값의 범위는?

① $1<m<\frac{5}{2}$　　② $1\le m<\frac{5}{2}$　　③ $1<m\le\frac{5}{2}$

④ $2<m<\frac{5}{2}$　　⑤ $2\le m<\frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2}\right)$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

i ) $\frac{3(m-1)}{m+2}>0$

$\Rightarrow$ $m<-2$ 또는 $m>1$

ii ) $\frac{2(2m-5)}{m+2}<0$

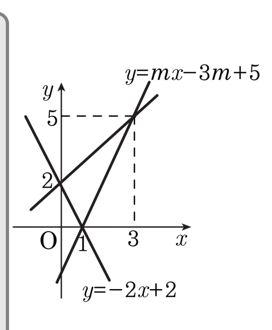
$\Rightarrow$ $-2<m<\frac{5}{2}$

i ), ii ) 의 공통영역을 구하면 $1<m<\frac{5}{2}$

해설

$2x+y-2=0$ 의 $x$, $y$ 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1, 0)$, $(0, 2)$ 이고 $y=m(x-3)+5$ 는 다음 그림과 같이 $m$ 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m=1$ , $(1, 0)$ 을 대입하면 $m=\frac{5}{2}$

$\therefore$ $1<m<\frac{5}{2}$



**22.** 점 $(a, b)$가 직선 $y = 2x - 3$위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① P(−4, 6)  ② P(−4, −6)  ③ P(2, 3)

④ P(3, 2)  ⑤ P(−2, −4)

해설

점 $(a, b)$가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
$a$에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 $a$의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 $a$에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore$ P$(-4, -6)$

**23.** 좌표평면 위의 점 $A(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 $l$ 이 있다. 점 $B(0,\ 2)$ 에서 직선 $l$ 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 $l$ 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$　　② $-\frac{1}{3}$　　③ $\frac{1}{3}$　　④ $\frac{1}{2}$　　⑤ $1$

**해설**

직선 $l$ 의 기울기를 $m$ 이라 하면 $y = m(x+1)$

$\therefore\ mx - y + m = 0$

점 $B(0,\ 2)$ 에서

직선 $l$ 까지의 거리는 $\frac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2 + 4m + 1 = 0$

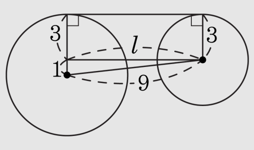
$(2m+1)^2 = 0$

$\therefore\ m = -\frac{1}{2}$

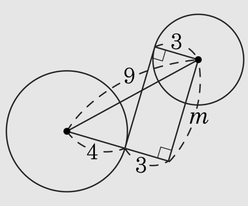
**24.** 두 원 $x^2 + y^2 = 16, (x-9)^2 + y^2 = 9$ 의 공통외접선의 길이를 $l$ 이라 하고 공통내접선의 길이를 $m$ 이라 할 때, $l^2 - m^2$ 의 값은?

① 48　② $-48$　③ 32　④ $-32$　⑤ 30

해설




중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.
$\therefore\ l^2 = 9^2 - 1^2$



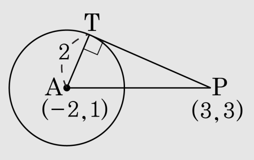

$\therefore\ m^2 = 9^2 - 7^2$
$\therefore\ l^2 - m^2 = (9^2 - 1^2) - (9^2 - 7^2)$
$= -1^2 + 7^2 = 48$

**25.** 점 (3, 3) 에서 원 $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　② $\sqrt{26}$　③ 6　④ $\sqrt{37}$　⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2^2$ 이므로
중심이 $(-2,\ 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.




$\overline{\mathrm{PT}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 - \overline{\mathrm{AT}}^2$
$= (3+2)^2 + (3-1)^2 - 2^2$
$= 25$

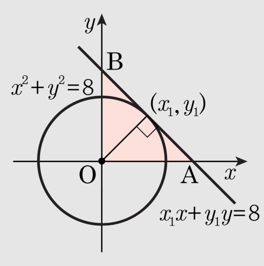
$\therefore\ \overline{\mathrm{PT}} = 5$

**26.** 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 $x$ 축, $y$ 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설




제1사분면에서의 원 위의 접점을 $(x_1, y_1)$ 이라고 하면 접선의 방정식은 $x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 $x$ 축, $y$ 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \frac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$

이 때, $(x_1, y_1)$ 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$

$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$

$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

**27.** 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

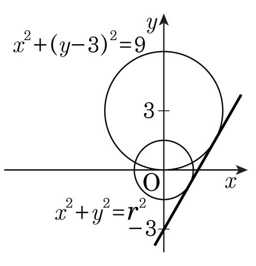
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

**28.** 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 $l$의 $y$절편이 $-3$이다. 직선 $l$의 기울기를 $m$이라고 하면 $\frac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$ )



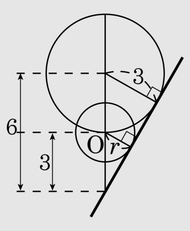

① $\frac{1}{2}$　　② 1　　③ $\sqrt{\frac{3}{2}}$
④ $\frac{3}{2}$　　⑤ 2

해설

$y$ 절편이 $-3$ 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 $l$ 이 접하므로,

$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3, \quad m^2=3$




그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 2 : 1 이다.

$6:3=3:r \quad \therefore \ r=\frac{3}{2}$

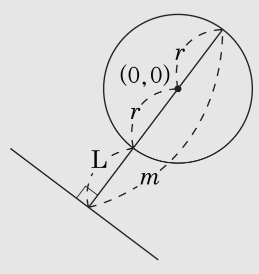
$\therefore \ \frac{m^2}{r}=2$

**29.** 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y+10=0$ 과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설




먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면

$$\frac{|0\times3+0\times4+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\Rightarrow$ 반지름보다 크므로 위의 그림과 같이 직선이 원 밖에 위치한다.

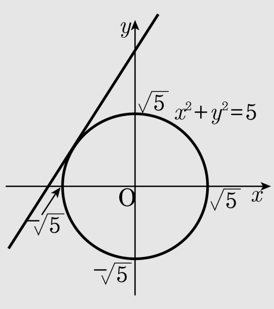
$\therefore$ 최소거리는 $L=$ 중심사이의 거리-반지름 $=2-1=1$

$\therefore$ 최대거리는 $m=$ 중심사이의 거리+반지름 $=2+1=3$

**30.** 직선 $y=2x+8$ 을 $x$ 축의 방향으로 $m$ 만큼 평행이동한 직선 $l_1$ 과 $y$ 축의 방향으로 $n$ 만큼 평행이동한 직선 $l_2$ 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설




직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면
원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의
기울기는 2 이다.
원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접
하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은
$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$
즉, $y=2x+5$ 이고,
이것이 두 직선 $l_1, l_2$ 와 일치한다.
이때, 직선 $y=2x+8$ 을 $x$ 축의 방향으로
$m$ 만큼 평행이동한 직선의 방정식은
$y=2(x-m)+8 \quad \therefore l_1 : y=2x-2m+8$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$-2m+8=5 \quad \therefore m=\frac{3}{2}$
또한, 직선 $y=2x+8$ 을 $y$ 축의 방향으로 $n$ 만큼
평행이동한 직선의 방정식은
$y-n=2x+8 \quad \therefore l_2 : y=2x+8+n$
이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로
$8+n=5 \quad \therefore n=-3$
$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

**31.** 원 $x^2+(y-1)^2=36$의 넓이를 이등분하는 직선 $y=mx+n$을 $x$축의 방향으로 1만큼 $y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2+(y+3)^2=49$의 넓이를 이등분하였다. 실수 $m, n$에 대하여 $m+n$의 값은?

① $-2$　② $-1$　③ $0$　④ $1$　⑤ $2$

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y=mx+n$은 점 $(0,1)$을 지난다.
$1=n \cdots$ ㉠
직선 $y=mx+n$를 $x$축의 방향으로 1만큼,
$y$축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y-2=m(x-1)+n$이 직선이
점 $(4,-3)$을 지나므로
$-5=3m+n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m=-2, n=1$
$\therefore m+n=-2+1=-1$

**32.** 점 (5, 3) 을 지나는 직선을 $y$ 축 방향으로 1 만큼 평행이동 시킨 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰을 때, 이동된 직선이 점 $(-10, -5)$ 를 지난다고 한다. 이 때, 이동되기 전의 직선의 방정식은?

① $y = 2x + \frac{1}{2}$　　② $y = \frac{1}{5}x + 2$　　③ $y = \frac{1}{3}x - 2$
④ $y = 4x + 1$　　⑤ $y = \frac{2}{5}x - 3$

해설

구하는 직선의 기울기를 $m$ 이라 하면
$y - 3 = m(x - 5)$
$y = mx - 5m + 3 \cdots$ ㉠
㉠을 $y$ 축 방향으로 1 만큼 평행이동시키면
$y - 1 = mx - 5m + 3$
$\therefore y = mx - 5m + 4 \cdots$ ㉡
㉡를 다시 원점에 대하여 대칭이동시키면
$-y = -mx - 5m + 4$
$\therefore y = mx + 5m - 4 \cdots$ ㉢
㉢의 그래프가 점 $(-10, -5)$ 를 지나므로
$-5 = -10m + 5m - 4 \therefore m = \frac{1}{5}$
따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}x + 2$

**33.** 직선 $x + 2y - 3 = 0$ 을 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y = x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2 + (y-a)^2 = 1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, $a$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a = 5$

해설

$x + 2y - 3 = 0 \Rightarrow x - 2y - 3 = 0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y - 2x - 3 = 0$ ($y = x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore\ a - 2 - 3 = 0 \quad \therefore\ a = 5$

**34.** 두 점 $\mathrm{A}(-3, 6)$, $\mathrm{B}(8, -1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3, 6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a, b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'}\perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7, 2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}}\le\overline{\mathrm{A'B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A'B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A'B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7, 2)$, $\mathrm{B}(8, -1)$, $\mathrm{P}(m, n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 $l$ 위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2, 1)$

**35.** 두 점 $\mathrm{A}(1, 3)$, $\mathrm{B}(4, 1)$ 과 $x$ 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $\mathrm{A}(1, 3)$ 을 $x$ 축에 대하여 대칭이동한 점을 $\mathrm{A}'$ 이라 하면

$\mathrm{A}'(1, -3)$

이 때, 다음 그림에서

$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$