1. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진 순서쌍 $(x,\ y)$중 $x + y$의 최댓값과 최솟값을 각각 $M,\ m$이라 할 때, $M + 2m$의 값을 구하면?

① -9　② -13　③ -18　④ -22　⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \cdots\cdots$ ㉠
$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉡
㉠ $\times (-2) +$ ㉡을 하면
$-10 < -2x - 10y < -2 \cdots\cdots$ ㉢
$-2 < 2x + 7y < 3 \cdots\cdots$ ㉣
㉢ $+$ ㉣ $= -12 < -3 < 1$
그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
그런데, y는 정수이므로 $y = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
이것을 ㉠, ㉡에 대입하여 적합한 x의 값을 구하면
$(x,\ y) = (-3,\ 1),\ (-6,\ 2),\ (-7,\ 2),\ (-11,\ 3)$
따라서, $x + y$의 최댓값은$-3 + 1 = -2$이고,
최솟값은$-11 + 3 = -8$이다.
$\therefore M = -2,\ m = -8 \ \therefore\ M + 2m = -18$

2. 등식 $2(x+2y)+1=-x+3y$ 이 성립한다고 할 때, $-1<2x+y<1$ 을 만족하는 정수 x, y 를 구하려고 한다. 다음 빈 칸에 알맞은 수를 차례대로 써넣어라.

[풀이] $2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면 $y=($ ㉠ $)$ 이 된다. $-1<2x+y<1$ 를 풀 때 y 대신 $y=($ ㉠ $)$ 를 대입하면 $-1<-x-1<1$ 이 된다. 부등식을 풀면 $-2<x<0$ 이 되므로 정수인 x 는 (㉡) 이 된다. x 값을 (㉠) 에 대입하면 $y=($ ㉢ $)$ 가 된다.

▶ 답 :

▶ 답 :

▶ 답 :

▷ 정답 : ㉠ $-3x-1$

▷ 정답 : ㉡ -1

▷ 정답 : ㉢ 2

해설

$2(x+2y)+1=-x+3y$ 를 y 에 대해서 정리하면

$2(x+2y)+1=-x+3y$
$2x+4y+1=-x+3y$
$4y-3y=-x-2x-1$
$y=-3x-1$

$-1<2x+y<1$ 에 y 대신 $y=-3x-1$ 를 대입하면

$-1<2x+(-3x-1)<1$
$-1<-x-1<1$
$0<-x<2$
$-2<x<0$

정수인 x 는 -1 이 된다.
x 값을 $y=-3x-1$ 에 대입하면 $y=2$ 이다.

3. 한 권에 500 원 하는 공책과 800 원 하는 연습장을 합하여 13 권을 사는데 총 금액이 7500 원 이상 8000 원 미만이 되게하려면 500 원 하는 공책을 몇 권을 살 수 있는지 구하여라.

▶ 답 : ______ 권

▷ 정답 : 9 권

해설

500 원 하는 공책은 x 권 , 800 원 하는 연습장은 $(13-x)$ 권

$7500 \le 500x + 800(13-x) < 8000$

$7500 \le 500x + 10400 - 800x < 8000$

$7500 \le -300x + 10400 < 8000$

$-29 \le -3x < -24$

$8 < x \le \frac{29}{3}$

그러므로 9권

4. 8% 의 소금물 200 g 이 있다. 여기에 x g 의 소금을 섞어서 10% 이상 20% 미만의 농도를 만들려고 한다. x 의 범위를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{40}{9} \le x < 30$

해설

8% 의 소금물 200 g 의 소금의 양은

$\frac{8}{100} \times 200 = 16\ (\mathrm{g})$ 이다.

따라서 소금 x g 을 추가하였을 때의 농도를 나타내면 $\frac{16+x}{200+x} \times 100$ 이다.

이 값이 10% 이상 20% 미만이므로,

$10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20$ 이고,

이를 연립방정식으로 나타내면

$$\begin{cases} 10 \le \frac{16+x}{200+x} \times 100 \\ \frac{16+x}{200+x} \times 100 < 20 \end{cases}$$

이다. 간단히 나타내면

$$\begin{cases} x \ge \frac{40}{9} \\ x < 34 \end{cases}$$

이다. 따라서 x 의 범위는 $\frac{40}{9} \le x < 30$ 이다.

5. 구슬을 보관함 1상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 <u>틀린</u> 것을 모두 고르면?

① 4 상자 ② 5 상자 ③ 6 상자
④ 7 상자 ⑤ 8 상자

해설

보관함 x상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$ 개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로 나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

6. 부등식 $x^2+ax+a+3\le 0$를 만족하는 x가 오직 1개이기 위한 양수 a가 존재하는 구간은?

① $1<a<3$　② $2<a<5$　③ $3<a<6$

④ $4<a<7$　⑤ $6<a<7$

해설

$x^2+ax+a+3\le 0$의 해가
1개 존재하기 위해서는
$x^2+ax+a+3=0$이 중근을 가져야 한다.

$$\begin{aligned}\therefore D &= a^2-4(a+3)\\ &= a^2-4a-12\\ &= (a-6)(a+2)=0\end{aligned}$$

$\therefore a=6\ (\because a>0)$

7. 다음 두 식을 동시에 만족하는 정수 x, y 의 순서쌍 $(x,\ y)$ 의 개수를 구하면?

$|x^2 - 2x| = y - 1 \quad \cdots\cdots$ ㉠
$y \le x + 1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

① 1 개 ② 2 개 ③ 3 개 ④ 4 개 ⑤ 5 개

해설

㉠에서 $y = |x^2 - 2x| + 1$ 이므로
㉡에 대입하면 $|x^2 - 2x| \le x$
(i) $x^2 - 2x \ge 0$ $(x \le 0,\ x \ge 2)$ 일 때
$x^2 - 2x \le x$
$\therefore\ x(x-3) \le 0$
$\therefore\ 0 \le x \le 3$
조건과 공통범위를 구하면 $x = 0,\ 2 \le x \le 3$
(ii) $x^2 - 2x < 0$ $(0 < x < 2)$ 일 때
$-(x^2 - 2x) \le x$
$\therefore\ x(x-1) \ge 0$
$\therefore\ x \le 0,\ x \ge 1$
조건과 공통 범위를 구하면 $1 \le x < 2$
(i), (ii) 에서 정수 x를 구하면 $x = 0,\ 1,\ 2,\ 3$
x의 값을 ㉠에 차례로 대입하면 $y = 1,\ 2,\ 1,\ 4$
구하는 순서쌍$(x,\ y)$는
$(0,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3, 4)$
따라서 구하는 개수는 4 개다.

8. 임의의 실수 x, y에 대하여 부등식 $x^2 + 4xy + 4y^2 + 10x + ay + b > 0$ 이 항상 성립 할 때, 실수 a, b의 조건으로 바른 것은?

① $a \neq 20,\ b < 25$

② $a = 20,\ 0 < b < 25$

③ $a = 20,\ b > 25$

④ $0 < a < 20,\ b > 25$

⑤ $0 < a \leq 20,\ 0 \leq b \leq 25$

해설

x에 대한 내림차순으로 정리한다

$\Rightarrow \quad x^2 + 2(2y+5) + 4y^2 + ay + b > 0$

항상 성립하려면 판별식이 0보다 작아야 한다

$D' = (2y+5)^2 - (4y^2 + ay + b) < 0$

$\Rightarrow \quad (20-a)y + 25 - b < 0$

임의의 $x,\ y$에 대해 성립하려면, $a = 20, \quad b > 25$

9. $\alpha < 0 < \beta$ 이고 이차부등식 $ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, 이차부등식 $cx^2 + bx + a < 0$ 의 해는?

① $\frac{1}{\alpha} < x < \frac{1}{\beta}$　　② $\frac{1}{\beta} < x < \frac{1}{\alpha}$

③ $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$　　④ $x < \frac{1}{\beta}$ 또는 $x > \frac{1}{\alpha}$

⑤ b 의 부호에 따라 다르다.

해설

$ax^2 + bx + c < 0$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ $(\alpha < 0 < \beta)$ 이므로

$ax^2 + bx + c = a(x-\alpha)(x-\beta)$, $a > 0$

$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a} < 0 \quad \therefore\ c < 0$

따라서,

$$\begin{aligned} cx^2 + bx + a &= c\left(x^2 + \frac{b}{c}x + \frac{a}{c}\right) \\ &= c\left(x^2 - \frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta}\right) \\ &= c\left\{x^2 - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)x + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}\right\} \\ &= c\left(x - \frac{1}{\alpha}\right)\left(x - \frac{1}{\beta}\right) < 0 \end{aligned}$$

$c < 0$ 이고 $\frac{1}{\alpha} < 0 < \frac{1}{\beta}$ 이므로 구하는 해는 $x < \frac{1}{\alpha}$ 또는 $x > \frac{1}{\beta}$

10. 좌표평면 위에서 모든 실수 x 에 대하여 직선 $y=2(kx+1)$ 이 곡선 $y=-(x-2)^2+1$ 보다 항상 위쪽에 있도록 실수 k 의 값을 정할 때, 다음 중 k 의 값의 범위에 속하지 <u>않는</u> 것은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 0 ⑤ -1

해설

임의의 실수 x 에 대하여
부등식 $2(kx+1) > -(x-2)^2+1 \cdots$ ㉠
이 항상 성립하도록 k 의 값을 정하면 된다.
㉠식을 정리하면
$x^2+2(k-2)x+5>0$
㉡식이 항상 성립하기 위하여

$$\frac{D}{4}=(k-2)^2-5<0$$

$\Rightarrow\ k^2-4k-1<0$

$\therefore\ 2-\sqrt{5}<k<2+\sqrt{5}$

이 때, 0, 1, 2, 3 은 k 의 값의 범위에 속하나
-1 은 속하지 않는다.

11. 연립부등식 $\begin{cases} x^3 - 2x^2 + x - 2 \geq 0 \\ x^2 - x - 6 < 0 \end{cases}$ 의 해는?

① $-2 \leq x < 3$　　② $-2 < x < 3$　　③ $2 \leq x < 3$

④ $2 < x \leq 3$　　⑤ $2 \leq x \leq 3$

해설

$x^2 - 2x + x - 2 \geq 0$에서

$x^2(x-2) + (x-2) \geq 0$

$\therefore (x-2)(x^2+1) \geq 0$

$x^2 + 1 > 0$이므로 $x - 2 \geq 0$

$\therefore x \geq 2 \cdots$(가)

$x^2 - x - 6 < 0$에서 $(x-3)(x+2) < 0$

$\therefore -2 < x < 3 \cdots$(나)

따라서 (가), (나)의 공통 범위를 구하면

$2 \leq x < 3$이다.

12. 연립부등식 $\begin{cases} x^2 - 12x - 45 > 0 \\ (x+2)(x-a^2+2a) < 0 \end{cases}$ 을 만족하는 x의 값이 존재하지 않을 때, 정수 a의 개수는?

① 6　　② 7　　③ 8　　④ 9　　⑤ 10

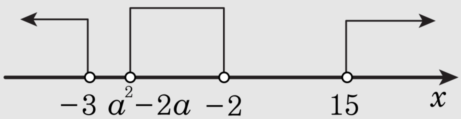
해설

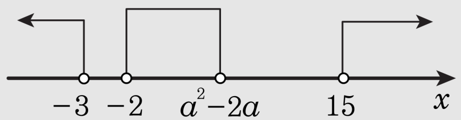
$x^2 - 12x - 45 > 0$에서

$(x+3)(x-15) > 0$

$\therefore x < -3$ 또는 $x > 15 \cdots$ ㉠

$(x+2)\{x-(a^2-2a)\} < 0 \cdots$ ㉡





$-3 \le a^2 - 2a \le 15$이면서

부등식 ㉠, ㉡를 동시에 만족하는

x은 존재하지 않는다.

(ⅰ) $-3 \le a^2 - 2a$에서

$a^2 - 2a + 3 = (a-1)^2 + 2 \ge 0$이므로

모든 실수 a에 대하여 항상 성립한다.

(ⅱ) $a^2 - 2a \le 15$에서

$a^2 - 2a - 15 \le 0,\ (a+3)(a-5) \le 0$

$\therefore -3 \le a \le 5$

따라서 정수 a는

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$

13. 이차방정식 $x^2-ax+a^2-4=0$의 서로 다른 두 실근 α, β가 $\alpha<0<\beta$을 만족할 때, a의 범위를 구하면?

① $a>2$ 또는 $a<-2$

② $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

③ $a>\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $a<-\frac{4}{\sqrt{3}}$

④ $-2<a<2$

⑤ $2<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$ 또는 $-\frac{4}{\sqrt{3}}<a<-2$

해설

ⅰ) 두 실근을 가지려면 판별식이 0보다 크다.

$\Rightarrow D=a^2-4(a^2-4)>0$

$\Rightarrow -\frac{4}{\sqrt{3}}<a<\frac{4}{\sqrt{3}}$

ⅱ) 두 근이 $\alpha<0<\beta$이려면

$x=0$을 대입한 값이 0보다 작아야 한다.

$\Rightarrow a^2-4<0$

$\Rightarrow -2<a<2$

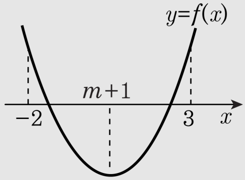
ⅰ), ⅱ)의 공통 범위: $-2<a<2$

14. 이차방정식 $x^2-2(m+1)x+m+3=0$의 두 실근이 -2와 3사이에 있을 때, 정수 m의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 2 개

해설



$f(x)=x^2-2(m+1)x+m+3$ 으로 놓으면

(i) $\dfrac{\mathrm{D}}{4}=(m+1)^2-(m+3)\geq 0$ 에서

$(m-1)(m+2)\geq 0$

$\therefore m\leq -2$ 또는 $m\geq 1$ $\cdots\cdots$ ㉠

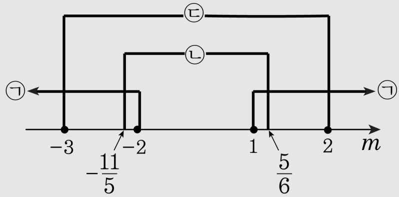
(ii) $f(-2)=5m+11>0$ 에서

$m>-\dfrac{11}{5}$,

$f(3)=6-5m>0$ 에서 $m<\dfrac{6}{5}$

$\therefore -\dfrac{11}{5}<m<\dfrac{6}{5}$ $\cdots\cdots$ ㉡

(iii) 대칭축의 위치



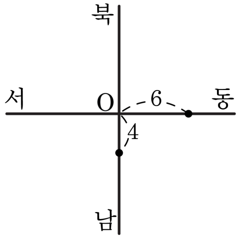
$-2<m+1<3$

$\therefore -3<m<2$ $\cdots\cdots$ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $-\dfrac{11}{5}<m\leq -2$ 또는 $1\leq m<\dfrac{6}{5}$

따라서, 정수 m은 $-2,\ 1$두 개다.

15. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



① 1 시간 후　② 1.2 시간 후　③ 1.4 시간 후　④ 1.6 시간 후　⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B 의 위치는 A(6, 0), B(0, −4) 이고 t 시간 후의 A, B 의 좌표는 A$(6-4t,\ 0)$, B$(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 $\overline{AB}$ 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2+(-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2-64t+52} = \sqrt{20\left(t^2-\frac{64}{20}t\right)+52} = \sqrt{20\left(t-\frac{8}{5}\right)^2+\frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

16. 두 점 $A(2,\ 5)$, $B(7,\ -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $0 < t < \frac{1}{3}$　② $0 < t < \frac{3}{5}$　③ $0 < t < \frac{5}{6}$
④ $\frac{3}{5} < t < 1$　⑤ $\frac{3}{5} < t < \frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore\ P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$

이때, $0 < t < 1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$\therefore\ 0 < t < \frac{5}{6}$

17. 세 변의 중점의 좌표가 $(-2, 3)$, $(3, -1)$, $(5, 4)$ 인 삼각형의 세 꼭짓점의 좌표는?

① $(-1, 8), (-4, -2), (10, 2)$

② $(0, 8), (4, 2), (10, 0)$

③ $(-1, 8), (4, 2), (10, 0)$

④ $(-1, -8), (4, -2), (10, -2)$

⑤ $(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$

해설

세 꼭짓점의 좌표를 각각

(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 로 놓으면,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = -2,\ \frac{x_2 + x_3}{2} = 3,\ \frac{x_3 + x_1}{2} = 5$$

$$\therefore\ x_1 + x_2 = -4,\quad x_2 + x_3 = 6,\quad x_3 + x_1 = 10$$

$$\therefore\ x_1 = 0,\quad x_2 = -4,\quad x_3 = 10$$

$$\frac{y_1 + y_2}{2} = 3,\ \frac{y_2 + y_3}{2} = -1,\ \frac{y_3 + y_1}{2} = 4$$

$$\therefore\ y_1 + y_2 = 6,\quad y_2 + y_3 = -2,\quad y_3 + y_1 = 8$$

$$\therefore\ y_1 = 8,\quad y_2 = -2,\quad y_3 = 0$$

따라서 세 꼭짓점의 좌표는

$(0, 8), (-4, -2), (10, 0)$ 이다.

18. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$　② $3x+4y-6=0$

③ $4x-3y-6=0$　④ $3x-4y+6=0$

⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a,b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0 \cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x,y)$ 라고 하면

$$x=\frac{3+a}{2},\ y=\frac{2+b}{2}$$

$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \quad \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

19. 두 점 A(3, 2), B(a, b) 를 지나는 직선의 기울기가 2 이고, 이 직선과 직선 $x+2y-3=0$ 의 교점은 선분 AB 를 2 : 1 로 내분하는 점이다. 이 때, $3a+b$ 의 값은?

① 3　　② 5　　③ 7　　④ 9　　⑤ 10

해설

직선 AB 의 기울기는 2 이므로

$$\frac{b-2}{a-3}=2,\ b-2=2(a-3),\ b=2a-4\cdots ㉠$$

$\overline{AB}$를 2 : 1 로 내분하는 점은

$$\left(\frac{2a+1\cdot 3}{2+1},\ \frac{2b+1\cdot 2}{2+1}\right)=\left(\frac{2a+3}{3},\ \frac{2b+2}{3}\right)$$ 이고,

이 점은 직선 $x+2y-3=0$ 위에 있으므로

$$\frac{2a+3}{3}+2\cdot\frac{2b+2}{3}-3=0$$

$\therefore\ a+2b-1=0\cdots ㉡$

㉠, ㉡을 연립하여 풀면

$a=\frac{9}{5},\ b=-\frac{2}{5}$ 이다.

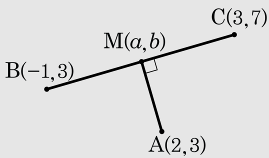
$\therefore\ 3a+b=5$

20. 점 A(2, 3)에서 두 점 B(−1, 3) , C(3, 7) 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 M(a, b) 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7 ② 9 ③ 11 ④ 13 ⑤ 15

해설

$\overline{\mathrm{BC}} \perp \overline{\mathrm{AM}}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 −1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2), \quad \therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

21. 다음 두 직선 $2x+y-2=0, mx-y-3m+5=0$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 m 의 값의 범위는?

① $1<m<\frac{5}{2}$ ② $1\le m<\frac{5}{2}$ ③ $1<m\le\frac{5}{2}$

④ $2<m<\frac{5}{2}$ ⑤ $2\le m<\frac{5}{2}$

해설

두 직선의 방정식을 연립하여 교점을 찾으면

$\Rightarrow \left(\frac{3m-3}{m+2}, \frac{-4m+10}{m+2}\right)$

교점이 1 사분면 위에 있으므로

ⅰ) $\frac{3(m-1)}{m+2}>0$

$\Rightarrow m<-2$ 또는 $m>1$

ⅱ) $\frac{2(2m-5)}{m+2}<0$

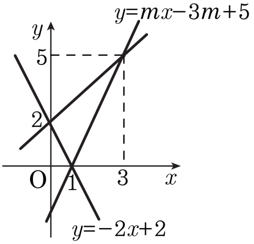
$\Rightarrow -2<m<\frac{5}{2}$

ⅰ), ⅱ) 의 공통영역을 구하면 $1<m<\frac{5}{2}$

해설

$2x+y-2=0$ 의 x, y 절편의 좌표를 각각 구하면 $(1, 0)$, $(0, 2)$ 이고 $y=m(x-3)+5$ 는 다음 그림과 같이 m 값에 관계없이 $(3, 5)$ 를 지나는 직선이다. $(0, 2)$ 를 대입하면 $m=1$, $(1, 0)$ 을 대입하면 $m=\frac{5}{2}$

$\therefore 1<m<\frac{5}{2}$



22. 점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$ 위를 움직일 때, 직선 $y = ax + 2b$는 항상 일정한 점 P를 지난다. 이 때, 점 P의 좌표는?

① $\mathrm{P}(-4,\ 6)$ ② $\mathrm{P}(-4,\ -6)$ ③ $\mathrm{P}(2,\ 3)$

④ $\mathrm{P}(3,\ 2)$ ⑤ $\mathrm{P}(-2,\ -4)$

해설

점 (a, b)가 직선 $y = 2x - 3$
위에 있으므로 $b = 2a - 3$
따라서 $y = ax + 2b$에서
$y = ax + 2(2a - 3)$이므로
a에 대하여 정리하면
$a(x + 4) - (6 + y) = 0$
이 식이 a의 값에 관계없이 항상 성립해야 하므로 a에 대한 항등식이다.
$\therefore x + 4 = 0,\ 6 + y = 0$
$\therefore \mathrm{P}(-4, -6)$

23. 좌표평면 위의 점 $A(-1,\ 0)$ 을 지나는 직선 l 이 있다. 점 $B(0,\ 2)$ 에서 직선 l 에 이르는 거리가 $\sqrt{5}$ 일 때, 직선 l 의 기울기는?

① $-\frac{1}{2}$ ② $-\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

해설

직선 l 의 기울기를 m 이라 하면 $y = m(x+1)$

$\therefore\ mx - y + m = 0$

점 $B(0,\ 2)$ 에서

직선 l 까지의 거리는 $\frac{|-2+m|}{\sqrt{m^2+1}} = \sqrt{5}$

양변을 제곱하여 정리하면

$4m^2 + 4m + 1 = 0$

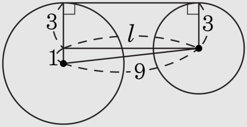
$(2m+1)^2 = 0$

$\therefore\ m = -\frac{1}{2}$

24. 두 원 $x^2+y^2=16, (x-9)^2+y^2=9$ 의 공통외접선의 길이를 l 이라 하고 공통내접선의 길이를 m 이라 할 때, l^2-m^2 의 값은?

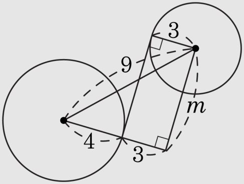
① 48 ② -48 ③ 32 ④ -32 ⑤ 30

해설



중심이 (0, 0) (9, 0) 이므로
중심간의 거리는 9이다.

$\therefore\ l^2=9^2-1^2$



$\therefore\ m^2=9^2-7^2$

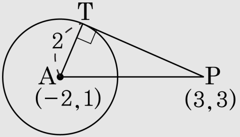
$\therefore\ l^2-m^2=(9^2-1^2)-(9^2-7^2)$
$=-1^2+7^2=48$

25. 점 (3, 3) 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5　　② $\sqrt{26}$　　③ 6　　④ $\sqrt{37}$　　⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 (−2, 1) 반지름의 길이가 2 인 원이다.



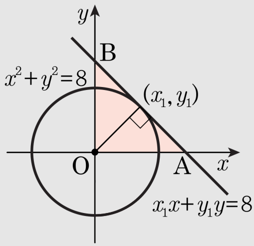
$$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AT}}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$\therefore\ \overline{\mathrm{PT}}=5$

26. 원 $x^2+y^2=8$ 과 제1사분면에서 접하는 접선이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 A, B 라고 할 때, 직각삼각형 OAB 의 넓이의 최솟값을 구하여라. (단, O 는 원점이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설



제1사분면에서의 원 위의 접점을 (x_1, y_1) 이라고 하면 접선의 방정식은

$x_1x+y_1y=8 \cdots\cdots$ ㉠ (단, $x_1>0, y_1>0$)

한편, 두 점 A, B 는 각각 접선 ㉠과 x 축, y 축의 교점이므로

$\mathrm{A}\left(\dfrac{8}{x_1}, 0\right), \mathrm{B}\left(0, \dfrac{8}{y_1}\right)$

따라서, 직각삼각형 OAB 의 넓이를 S 라고 하면

$$\mathrm{S}=\frac{1}{2}\cdot\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{8}{x_1}\cdot\frac{8}{y_1}=\frac{32}{x_1y_1}$$

이 때, (x_1, y_1) 이 원 $x^2+y^2=8$ 위의 점이므로

$x_1^2+y_1^2=8$ 이고

$x_1>0, y_1>0$ 에서

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\geq\sqrt{x_1^2\cdot y_1^2}=x_1y_1,\ x_1y_1\leq 4$$

$$\therefore \frac{1}{x_1y_1}\geq\frac{1}{4}\leftarrow\frac{x_1^2+y_1^2}{2}=\frac{8}{2}=4$$

$$\therefore \mathrm{S}=\frac{32}{x_1y_1}\geq 32\cdot\frac{1}{4}=8$$ (단, 등호는 $x_1=y_1$ 일 때 성립)

따라서, 구하는 넓이의 최소의 값은 8 이다.

27. 원 $x^2+y^2=1$ 밖의 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$에서 이 원에 두 개의 접선을 그을 때 그 접점을 Q, R이라고 하자. 직선 QR의 방정식을 $ax+by=1$라 할 때 $a+b$를 구하여라.

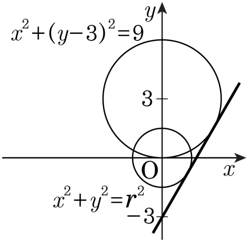
▶ 답 :

▷ 정답 : 7

해설

접점의 좌표를 $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$라고 하면
Q, R에서의 접선의 방정식은 각각
$x_1x+y_1y=1$, $x_2x+y_2y=1$이고,
두 접선은 모두 점 $\mathrm{P}(3,\ 4)$를 지나므로
$3x_1+4y_1=1$, $3x_2+4y_2=1$
여기서 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$는
방정식 $3x+4y=1$의 근이며, 이 두 접점을
지나는 직선은 오직 하나뿐이므로
직선 QR의 방정식은 $3x+4y=1$이다.
$\therefore\ a=3,\ b=4 \quad \therefore\ a+b=7$

28. 다음 그림과 같이 두 원 $x^2+y^2=r^2$, $x^2+(y-3)^2=9$ 의 공통 외접선 l의 y절편이 -3이다. 직선 l의 기울기를 m이라고 하면 $\dfrac{m^2}{r}$의 값은?(단, $0<r<3$)



① $\dfrac{1}{2}$　　② 1　　③ $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

④ $\dfrac{3}{2}$　　⑤ 2

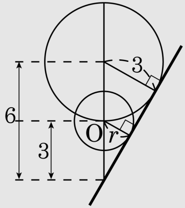
해설

y 절편이 -3 인 직선의 방정식을 $y=mx-3$ 이라 하면

$x^2+(y-3)^2=9$와 l 이 접하므로,

$$\frac{|-3-3|}{\sqrt{m^2+1^2}}=3,\qquad m^2=3$$

그리고 원만 따로 떼어내어 생각해 보면, 그림과 같이 두 직각삼각형은 닮음으로 닮음비가 $2:1$ 이다.



$$6:3=3:r\qquad \therefore\ r=\frac{3}{2}$$

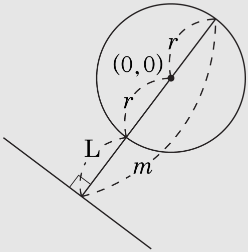
$$\therefore\ \frac{m^2}{r}=2$$

29. 원 $x^2+y^2=1$ 과 직선 $3x+4y+10=0$ 과의 최소거리와 최대거리의 합을 구하면?

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설



먼저 원의 중심과 직선 사이의 거리를 구해보면

$$\frac{|0\times3+0\times4+10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$

$\Rightarrow$ 반지름보다 크므로 위의 그림과 같이
직선이 원 밖에 위치한다.

$\therefore$ 최소거리는 $L=$ 중심사이의 거리-반지름

$=2-1=1$

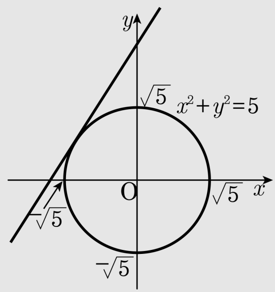
$\therefore$ 최대거리는 $m=$ 중심사이의 거리+반지름

$=2+1=3$

30. 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선 l_1 과 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선 l_2 가 모두 원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접한다. 이 때, $m+n$ 의 값은?

① $-\frac{3}{2}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{5}{2}$

해설



직선 $y=2x+8$ 을 평행이동하면 원 $x^2+y^2=5$ 와 접하므로 접선의 기울기는 2 이다.

원 $x^2+y^2=5$ 와 제2 사분면에서 접하고 기울기가 2 인 접선의 방정식은

$y=2x+\sqrt{5}\cdot\sqrt{1+2^2}$

즉, $y=2x+5$ 이고,

이것이 두 직선 l_1, l_2 와 일치한다.

이때, 직선 $y=2x+8$ 을 x 축의 방향으로 m 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y=2(x-m)+8 \qquad \therefore l_1 : y=2x-2m+8$

이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로

$-2m+8=5 \qquad \therefore m=\frac{3}{2}$

또한, 직선 $y=2x+8$ 을 y 축의 방향으로 n 만큼 평행이동한 직선의 방정식은

$y-n=2x+8 \qquad \therefore l_2 : y=2x+8+n$

이것이 직선 $y=2x+5$ 와 일치하므로

$8+n=5 \qquad \therefore n=-3$

$\therefore m+n=\frac{3}{2}-3=-\frac{3}{2}$

31. 원 $x^2 + (y-1)^2 = 36$ 의 넓이를 이등분하는 직선 $y = mx + n$을 x축의 방향으로 1만큼 y축의 방향으로 2만큼 평행이동하였더니 원 $(x-4)^2 + (y+3)^2 = 49$ 의 넓이를 이등분하였다. 실수 m, n에 대하여 $m + n$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

원의 넓이를 이등분하려면
원의 중심을 지나야 하므로
$y = mx + n$ 은 점 $(0, 1)$ 을 지난다.
$1 = n \cdots$ ㉠
직선 $y = mx + n$를 x축의 방향으로 1만큼,
y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면
$y - 2 = m(x-1) + n$이 직선이
점 $(4, -3)$을 지나므로
$-5 = 3m + n \cdots$ ㉡
㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $m = -2, n = 1$
$\therefore m + n = -2 + 1 = -1$

32. 점 (5, 3) 을 지나는 직선을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동 시킨 후, 다시 원점에 대하여 대칭이동시켰을 때, 이동된 직선이 점 $(-10, -5)$ 를 지난다고 한다. 이 때, 이동되기 전의 직선의 방정식은?

① $y = 2x + \frac{1}{2}$ ② $y = \frac{1}{5}x + 2$ ③ $y = \frac{1}{3}x - 2$

④ $y = 4x + 1$ ⑤ $y = \frac{2}{5}x - 3$

해설

구하는 직선의 기울기를 m 이라 하면

$y - 3 = m(x - 5)$

$y = mx - 5m + 3 \cdots$ ㉠

㉠을 y 축 방향으로 1 만큼 평행이동시키면

$y - 1 = mx - 5m + 3$

$\therefore y = mx - 5m + 4 \cdots$ ㉡

㉡를 다시 원점에 대하여 대칭이동시키면

$-y = -mx - 5m + 4$

$\therefore y = mx + 5m - 4 \cdots$ ㉢

㉢의 그래프가 점 $(-10, -5)$ 를 지나므로

$-5 = -10m + 5m - 4 \therefore m = \frac{1}{5}$

따라서, 구하는 직선의 방정식은 $y = \frac{1}{5}x + 2$

33. 직선 $x+2y-3=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동한 후 다시 $y=x$ 에 대하여 대칭이동 하였더니, 원 $(x-1)^2+(y-a)^2=1$ 의 넓이를 이등분하였다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $a=5$

해설

$x+2y-3=0 \Rightarrow x-2y-3=0$($x$ 축 대칭이동)

$\Rightarrow \quad y-2x-3=0$ ($y=x$ 대칭이동)

원의 넓이를 이등분하려면, 원의 중심이 직선 위에 있으면 된다.

따라서 중심의 좌표를 직선에 대입한다.

$\therefore \ a-2-3=0 \quad \therefore \ a=5$

34. 두 점 $\mathrm{A}(-3, 6)$, $\mathrm{B}(8, -1)$와 직선 $x+y+1=0$이 있다. 이 직선 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$를 최소가 되게 하는 점 P의 좌표를 $(x,\ y)$라 할 때, $y-x$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$\mathrm{A}(-3, 6)$ 의 직선 $x+y+1=0$에 대한 대칭점을 $\mathrm{A}'(a, b)$라 하면

$\dfrac{a-3}{2}+\dfrac{b+6}{2}+1=0,\ a+b=-5 \cdots$ ㉠

$\overline{\mathrm{AA}'} \perp l$이므로, $\overline{\mathrm{AA}'}$의 기울기는 1이다.

$\dfrac{b-6}{a+3}=1,\ a-b=-9 \cdots$ ㉡

㉠ + ㉡ : $2a=-14,\ a=-7,\ b=2$

$\therefore\ \mathrm{A}'(-7, 2)$

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A}'\mathrm{P}}+\overline{\mathrm{BP}} \le \overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$

즉, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 $\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$이고,

이 때 점 P는 A′, B 와 일직선상에 있으므로,

$\overline{\mathrm{A}'\mathrm{B}}$의 기울기는 $\overline{\mathrm{BP}}$의 기울기와 같다.

$\mathrm{A}'(-7, 2)$, $\mathrm{B}(8, -1)$, $\mathrm{P}(m, n)$에서

$\dfrac{-1-2}{8-(-7)}=\dfrac{n+1}{m-8}$,

$m+5n=3 \cdots$ ㉢

점 P는 직선 l위에 있으므로, $m+n=-1 \cdots$ ㉣

㉢, ㉣에서 $m=-2,\ n=1$

$\therefore\ \mathrm{P}(-2, 1)$

35. 두 점 $A(1,3), B(4,1)$ 과 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

점 $A(1,3)$ 을 x 축에 대하여
대칭이동한 점을 A' 이라 하면
$A'(1,-3)$
이 때, 다음 그림에서
$\overline{AP}=\overline{A'P}$
또, $\overline{AP}+\overline{BP}=\overline{A'P}+\overline{BP} \geq \overline{A'B}$ 이므로
$\overline{AP}+\overline{BP}$ 의 최솟값은
$\overline{A'B}=\sqrt{(4-1)^2+\{1-(-3)\}^2}=5$