1. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $A(2,\ 1)$, $B(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $P(1,\ 0)$　② $P(0,\ 1)$　③ $P(-1,\ 0)$
④ $P(0,\ -1)$　⑤ $P(0,\ 0)$

해설

점 $P(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로
$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$
$-4a + 4 = 8a + 4$
$\therefore\ a = 0$
$\therefore\ P(0,\ 1)$

2. 세 점 A(5, 0), B(0, 3), C(0, −3)을 꼭짓점으로 하는 △ABC의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO}=\overline{BO}=\overline{CO}$, $\overline{BO}=\overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2+(y-3)^2} = \sqrt{x^2+(y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y=0\cdots$ ①
$\overline{AO}=\overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2+y^2} = \sqrt{x^2+(y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x-6y=16$
즉 $5x-3y=8\cdots$②
①과 ②에서 $x=\frac{8}{5},\ \ y=0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$이다.

3. 두 점 $A(2,\ 5)$, $B(7,\ -1)$ 에 대하여 선분 AB 를 $t : (1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0 < t < 1$)

① $0 < t < \frac{1}{3}$
② $0 < t < \frac{3}{5}$
③ $0 < t < \frac{5}{6}$
④ $\frac{3}{5} < t < 1$
⑤ $\frac{3}{5} < t < \frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t : (1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore\ P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5} < t < \frac{5}{6}$

이때, $0 < t < 1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$\therefore\ 0 < t < \frac{5}{6}$

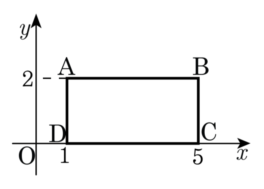
4. 정점 A(3, 2)와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$　　② $3x+4y-6=0$
③ $4x-3y-6=0$　　④ $3x-4y+6=0$
⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면
$3a-4b-11=0 \cdots$ ①
$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면
$x=\dfrac{3+a}{2}$, $y=\dfrac{2+b}{2}$
$\therefore\ a=2x-3, b=2y-2 \quad \cdots$ ②
②를 ①에 대입하면
$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$
$\therefore\ 3x-4y-6=0$

5. 점 $(-1,-1)$을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax+by+1=0$일 때, $a-b$의 값은?



① -3　　② -1　　③ 1　　④ 3　　⑤ 5

해설

$(-1,-1)$을 지나므로, $-a-b+1=0 \cdots$ ㉠

그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심 $\left(\frac{5+1}{2},\ \frac{0+2}{2}\right)$를 지나야 한다.

$\Rightarrow\ 3a+b+1=0\ \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면, $a=-1,\ \ b=2$

$\therefore\ \ a-b=-3$

6. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단,$a > 0$, $a \neq 1$)

$y = ax, \quad y = -ax, \quad y = x + a$

① $a > \frac{1}{3}$ ② $a > \frac{2}{3}$ ③ $a > \frac{1}{2}$ ④ $a > 1$ ⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각구하면,

$\Rightarrow \quad (0, 0), \ \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

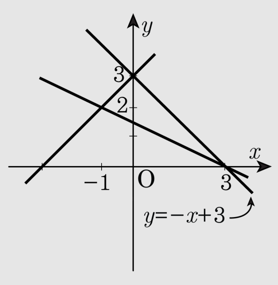
$a + 1 > 0, \quad a - 1 > 0 \qquad \Rightarrow \quad a > 1$

7. 두 직선 $y=-x+3$, $y=mx+m+2$ 이 제 1 사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha < m < \beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는
m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\frac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\frac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

8. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$　③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$
④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로
$3a+2b=6$
$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a \cdots$ ㉠
㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면
$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$
$(6-3a)x-ay=1$
$(6x-1)-(3x+y)a=0$
$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$
$x=\frac{1}{6},\ \ y=-\frac{1}{2}$
$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

9. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{2}$ ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$d=\dfrac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$

$\le \dfrac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$

$(\because\ \sqrt{2k^2+6k+5}$

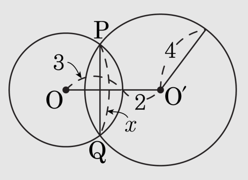
$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$

10. 두 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

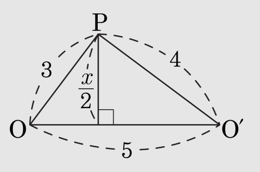
① 4　② 4.2　③ 4.4　④ 4.6　⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$를 x라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2} \times 3 \times 4 = \frac{1}{2} \times 5 \times \frac{x}{2}$

$\therefore\ x = \frac{24}{5} = 4.8$

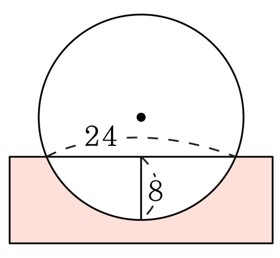
11. 반지름의 길이가 각각 $3\,\text{cm}$, $5\,\text{cm}$ 이고, 중심거리가 $10\,\text{cm}$ 인 두 원의 공통외접선의 길이와 공통내접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, x^2-y^2 의 값은?

① -60 ② -36 ③ 36 ④ 60 ⑤ 96

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{d^2-(r+r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2-(5+3)^2} = \sqrt{36}$ 이고
공통외접선의 길이는 $\sqrt{d^2-(r-r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2-(5-3)^2} = \sqrt{96}$ 이다.
그러므로 $x^2-y^2 = 96-36 = 60$ 이다.

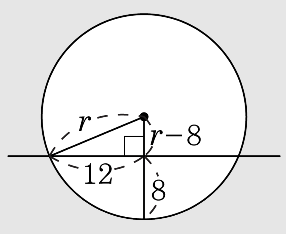
12. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



① $6\sqrt{3}$　② 13　③ $8\sqrt{3}$　④ 16　⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를
r라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$
$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
$\therefore r = 13$



13. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$ ② $a^2+b^2=9$ ③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$ ⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

14. 점 $(1,\ 4)$ 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를
지나므로 구하는 기울기는 $\dfrac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

15. 포물선 $y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y = x - 1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$　② $-\frac{5}{4}$　③ $-\frac{3}{4}$　④ $-\frac{1}{4}$　⑤ 0

해설

$y = x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y = x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y - a) = x^2, \quad y = -x^2 + a$
이 곡선이 $y = x - 1$ 에 접하려면
$x - 1 = -x^2 + a$, $x^2 + x - a - 1 = 0$ 에서
$D = 1^2 - 4(-a - 1) = 0$
$\therefore \ a = -\frac{5}{4}$

16. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\frac{2}{5}$ ② $-\frac{1}{2}$ ③ $\frac{1}{3}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\frac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\frac{2+m}{2},\frac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{2}$

ii) $\frac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\frac{8}{5}$, $n=-\frac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\frac{4}{5}$

17. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -18　② -16　③ 0　④ 22　⑤ 23

해설

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$

1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$

2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.

$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$

1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$

$a+b+c=22$

18. 두 점 A $(3,\ 5)$, B $(1,\ 1)$ 이 있을 때, x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되는 점 P 의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$　　② $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

③ $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$　　④ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

해설

x 축 위의 점 P 에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B′ $(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값이다.

$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$

이때 점 P의 좌표는 점 B′와 점 A를 지나는
직선의 방정식의 x 절편이다.

즉 직선 AB′ : $y-5=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$

$\therefore\ y=3x-4$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$