1. 직선 $y = 2x + 1$ 위에 있고, $A(2,\ 1)$, $B(0,\ -1)$에서 같은 거리에 있는 점 P의 좌표는?

① $P(1,\ 0)$　　② $P(0,\ 1)$　　③ $P(-1,\ 0)$

④ $P(0,\ -1)$　　⑤ $P(0,\ 0)$

해설

점 $P(a,\ 2a+1)$라고 하면, $\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a-2)^2 + 4a^2} = \sqrt{a^2 + 4(a+1)^2}$$

$$-4a + 4 = 8a + 4$$

$$\therefore\ a = 0$$

$$\therefore\ P(0,\ 1)$$

2. 세 점 $A(5,\ 0)$, $B(0,\ 3)$, $C(0,\ -3)$ 을 꼭짓점으로 하는 $\triangle ABC$ 의 외심의 좌표는?

① $O\left(\frac{5}{8},\ 0\right)$　② $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$　③ $O\left(0,\ \frac{5}{8}\right)$
④ $O\left(0,\ \frac{8}{5}\right)$　⑤ $O(0,\ 0)$

해설

두 점 $A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$ 사이의 거리
$\overline{AB} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
삼각형의 외심에서 세 꼭짓점에 이르는 거리는 같으므로
$\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$, $\overline{BO} = \overline{CO}$ 에서
$\sqrt{x^2 + (y-3)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $y = 0 \cdots$ ①
$\overline{AO} = \overline{BO}$ 에서
$\sqrt{(x-5)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y-3)^2}$
양변을 제곱하여 정리하면 $10x - 6y = 16$
즉 $5x - 3y = 8 \cdots$ ②
①과 ②에서 $x = \frac{8}{5}$, $y = 0$
따라서 외심의 좌표는 $O\left(\frac{8}{5},\ 0\right)$ 이다.

3. 두 점 A(2, 5) , B(7, -1) 에 대하여 선분 AB 를 $t:(1-t)$ 로 내분하는 점 P 가 제 1 사분면에 있을 때, t 의 값의 범위는? (단, $0<t<1$)

① $0<t<\frac{1}{3}$　② $0<t<\frac{3}{5}$　③ $0<t<\frac{5}{6}$

④ $\frac{3}{5}<t<1$　⑤ $\frac{3}{5}<t<\frac{5}{6}$

해설

점 P 가 $\overline{AB}$ 를 $t:(1-t)$ 로 내분하므로

$$P\left(\frac{7t+(1-t)\cdot 2}{t+(1-t)},\ \frac{-t+(1-t)\cdot 5}{t+(1-t)}\right)$$

$\therefore$ $P(5t+2,\ -6t+5)$

점 P 가 제1 사분면에 있으므로 $5t+2>0$ 이고 $-6t+5>0$

$\therefore\ -\frac{2}{5}<t<\frac{5}{6}$

이때, $0<t<1$ 이므로 구하는 t 의 값의 범위는

$\therefore\ 0<t<\frac{5}{6}$

4. 정점 A$(3,\ 2)$와 직선 $3x-4y-11=0$ 위의 점을 잇는 선분의 중점의 자취의 방정식은?

① $3x-4y-6=0$ ② $3x+4y-6=0$

③ $4x-3y-6=0$ ④ $3x-4y+6=0$

⑤ $3x+4y+6=0$

해설

직선 $3x-4y-11=0$ 위의 임의의 점을 $\mathrm{Q}(a, b)$ 라고 하면

$3a-4b-11=0 \cdots$ ①

$\overline{\mathrm{AQ}}$ 의 중점을 $\mathrm{P}(x, y)$ 라고 하면

$$x=\frac{3+a}{2},\ y=\frac{2+b}{2}$$

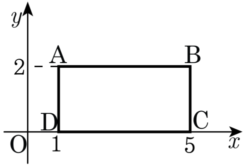
$\therefore\ a=2x-3,\ b=2y-2 \quad \cdots$ ②

②를 ①에 대입하면

$3(2x-3)-4(2y-2)-11=0$

$\therefore\ 3x-4y-6=0$

5. 점 $(-1, -1)$을 지나고 다음 그림과 같은 직사각형 ABCD의 넓이를 이등분하는 직선의 방정식이 $ax + by + 1 = 0$일 때, $a - b$의 값은?



① -3 ② -1 ③ 1 ④ 3 ⑤ 5

해설

$(-1, -1)$을 지나므로, $-a - b + 1 = 0 \cdots$ ㉠

그리고 직선이 사각형을 이등분 하려면 사각형의 중심

$\left(\dfrac{5+1}{2}, \ \dfrac{0+2}{2}\right)$를 지나야 한다.

$\Rightarrow \ 3a + b + 1 = 0 \ \cdots$ ㉡

㉠과 ㉡을 연립하면, $a = -1, \ \ b = 2$

$\therefore \ \ a - b = -3$

6. 다음 도형의 방정식이 나타내는 세 도형이 서로 만나 삼각형을 이루고, 이 삼각형이 x 축에 아래쪽좌표평면에 놓이는 부분이 없을 때, a 의 값의 범위를 구하면? (단,$a > 0,\ a \neq 1$)

$$y = ax,\quad y = -ax,\quad y = x + a$$

① $a > \frac{1}{3}$　② $a > \frac{2}{3}$　③ $a > \frac{1}{2}$　④ $a > 1$　⑤ $a > \frac{3}{2}$

해설

세 직선의 방정식의 교점을 각각구하면,

$$\Rightarrow\quad (0,0),\ \left(-\frac{a}{a+1}, \frac{a^2}{a+1}\right), \left(\frac{a}{a-1}, \frac{a^2}{a-1}\right)$$

x 축 아래로 놓이는 부분이 없으려면,

교점의 y 좌표가 0 보다 크거나 같아야 한다.

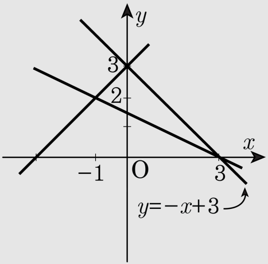
$a + 1 > 0,\ \ a - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad a > 1$

7. 두 직선 $y=-x+3$, $y=mx+m+2$이 제 1사분면에서 만나도록 하는 m 의 값의 범위가 $\alpha<m<\beta$ 일 때, $2\alpha+\beta$ 의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$m(x+1)-(y-2)=0$ 에서 $y=mx+m+2$ 는 m 의 값에 관계없이 $(-1,\ 2)$ 를 지난다.



$(3,\ 0)$ 을 지날때 $m=-\dfrac{1}{2}$

$(0,\ 3)$ 을 지날때 $m=1$

$\therefore\ -\dfrac{1}{2}<m<1$

따라서 $2\alpha+\beta=\ 0$

8. 점 $(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직일 때, 직선 $2bx-ay=1$이 항상 지나는 정점의 좌표는?

① $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}\right)$　② $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$　③ $\left(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

④ $\left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$　⑤ $\left(\frac{1}{6}, -1\right)$

해설

$(a,\ b)$가 $3x+2y=6$ 위를 움직이므로

$3a+2b=6$

$\therefore\ b=3-\frac{3}{2}a \cdots$ ㉠

㉠을 $2bx-ay=1$에 대입하면

$2\left(3-\frac{3}{2}a\right)x-ay=1$

$(6-3a)x-ay=1$

$(6x-1)-(3x+y)a=0$

$\therefore\ 6x-1=0,\ 3x+y=0$

$x=\frac{1}{6},\quad y=-\frac{1}{2}$

$\therefore\ \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{2}\right)$

9. 원점 $O(0,\ 0)$ 에서 직선 $(k+1)x+(k+2)y+3=0$ 에 내린 수선의 길이가 최대일 때, 그 길이는? (단, k 는 상수)

① 2　② 3　③ $2\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{3}$　⑤ $3\sqrt{2}$

해설

원점과 직선 사이의 거리를 d 라 하면

$$d=\frac{|3|}{\sqrt{(k+1)^2+(k+2)^2}}=\frac{3}{\sqrt{2k^2+6k+5}}$$

$$\le \frac{3}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=3\sqrt{2}$$

$(\because\ \ \sqrt{2k^2+6k+5}$

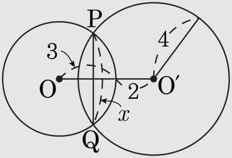
$$=\sqrt{2\left(k+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\ge\sqrt{\frac{1}{2}})$$

10. 두 원 O 와 O′ 의 반지름의 길이가 각각 3 cm, 4 cm 이고 중심거리가 5 cm 일 때, 두 원의 공통현의 길이를 구하면?

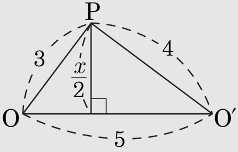
① 4　② 4.2　③ 4.4　④ 4.6　⑤ 4.8

해설

$\overline{PQ}$를 x라 하면,



확대해보면 두 교점을 P, Q 라 하면,



삼각형의 넓이 : $\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times\frac{x}{2}$

$\therefore\ x=\frac{24}{5}=4.8$

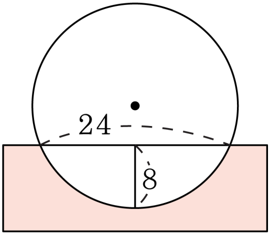
11. 반지름의 길이가 각각 3 cm, 5 cm 이고, 중심거리가 10 cm 인 두 원의 공통외접선의 길이와 공통내접선의 길이를 각각 x, y 라 할 때, $x^2 - y^2$ 의 값은?

① -60　② -36　③ 36　④ 60　⑤ 96

해설

공통내접선의 길이는 $\sqrt{d^2 - (r + r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2 - (5+3)^2} = \sqrt{36}$ 이고
공통외접선의 길이는 $\sqrt{d^2 - (r - r')^2}$ 이므로
$\sqrt{10^2 - (5-3)^2} = \sqrt{96}$ 이다.
그러므로 $x^2 - y^2 = 96 - 36 = 60$ 이다.

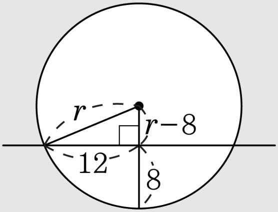
12. 구 모양의 공을 띄워 놓은 호수가 얼었다. 얼음을 깨지 않고 공을 들어내었더니 다음 그림과 같이 윗면의 지름이 24이고 깊이가 8인 홈이 생겼다고 할 때, 이 공의 반지름의 길이는?



① $6\sqrt{3}$ ② 13 ③ $8\sqrt{3}$ ④ 16 ⑤ $12\sqrt{3}$

해설

다음 그림처럼 공의 반지름의 길이를
r라 하면
피타고라스의 정리에 의하여
$r^2 = 12^2 + (r-8)^2$
$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$
$\therefore r = 13$



13. $(x+3)^2+(y-2)^2=9$ 인 원을 x축 방향으로 a 만큼 y축 방향으로 b 만큼 평행이동하면, 처음 원과 외접한다고 할 때, a, b 사이의 관계식은?

① $a^2+b^2=4$　② $a^2+b^2=9$　③ $a^2+b^2=16$
④ $a^2+b^2=25$　⑤ $a^2+b^2=36$

해설

$(x+3)^2+(y-2)^2=9 \cdots$ ㉠
원 ㉠을 x 축의 방향으로 a 만큼,
y 축의 방향으로 b 만큼 평행이동하면
$\{(x-a)+3\}^2+\{(y-b)-2\}^2=9$
$\{x-(a-3)\}^2+\{y-(b+2)\}^2=9 \cdots$ ㉡
원 ㉠과 원 ㉡이 외접하므로 중심거리 d와 두 원 ㉠, ㉡의 반지름의 길이의 합이 서로 같아야 한다.
$\therefore\ d=\sqrt{(a-3+3)^2+(b+2-2)^2}$
$=\sqrt{a^2+b^2}=3+3=6$
$\therefore\ a^2+b^2=36$

14. 점 $(1,\ 4)$ 를 지나는 직선을 원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지날 때, 처음 직선의 기울기는?

① -2 ② -1 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

원점에 대하여 대칭이동한 직선이 점 $(2,\ 5)$ 를 지나므로 처음 직선은 점 $(-2, -5)$ 를 지난다.
따라서 처음 직선은 두 점 $(1, 4)$, $(-2, -5)$ 를
지나므로 구하는 기울기는 $\dfrac{4-(-5)}{1-(-2)} = 3$

15. 포물선 $y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축의 방향으로 a 만큼 평행이동시켰더니 직선 $y=x-1$ 에 접하였다. 이 때, a 의 값은?

① $-\frac{7}{4}$ ② $-\frac{5}{4}$ ③ $-\frac{3}{4}$ ④ $-\frac{1}{4}$ ⑤ 0

해설

$y=x^2$ 을 x 축에 대하여 대칭이동하면 $-y=x^2$ 이고
이를 다시 y 축 방향으로 a 만큼 평행이동 하면,
$-(y-a)=x^2,\quad y=-x^2+a$
이 곡선이 $y=x-1$ 에 접하려면
$x-1=-x^2+a$, $x^2+x-a-1=0$ 에서
$D=1^2-4(-a-1)=0$
$\therefore\ a=-\frac{5}{4}$

16. 좌표평면에서 점 $\mathrm{P}(1,4)$ 를 다음 평행이동식 $f:(x,y)\to(x+m,y+n)$ 에 의하여 이동시킨 점을 Q 라고 할 때, 두 점 P, Q 는 직선 $y=2x$ 에 대하여 대칭이다. 이 때, $m+n$ 의 값을 구하면?

① $-\dfrac{2}{5}$ ② $-\dfrac{1}{2}$ ③ $\dfrac{1}{3}$ ④ $\dfrac{3}{2}$ ⑤ $\dfrac{4}{5}$

해설

$\mathrm{Q}=(1+m,4+n)$ 으로 나타낼 수 있다.

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 기울기는 $y=2x$ 에 수직이므로 $-\dfrac{1}{2}$ 이고,

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 $\left(\dfrac{2+m}{2},\dfrac{8+n}{2}\right)$ 은

$y=2x$ 위에 있다.

$\Rightarrow$ i) $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{1}{2}$

ii) $\dfrac{8+n}{2}=m+2$

i) 과 ii) 를 연립하면, $m=\dfrac{8}{5}$, $n=-\dfrac{4}{5}$

$\therefore\ m+n=\dfrac{4}{5}$

17. 원 $x^2+y^2-4x-8y=0$ 을 직선 $y=ax+b$ 에 대하여 대칭이동하면 원 $x^2+y^2-c=0$ 이 된다고 한다. 이 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -18　② -16　③ 0　④ 22　⑤ 23

해설

$(x-2)^2+(y-4)^2=20$

즉, $(2,4)$ 를 $y=ax+b$ 에 대칭이동하면 $(0,0)$

1) $(2,4)$ 와 $(0,0)$ 의 중점은 $y=ax+b$ 를 지난다. $\Rightarrow 2=a+b$

2) $(2,4),(0,0)$ 을 잇는 선분은 $y=ax+b$ 에 수직이다.

$\Rightarrow 2=-\frac{1}{a}, a=-\frac{1}{2}$

1), 2) 에 의해 $a=-\frac{1}{2},\ b=\frac{5}{2},\ c=20,$

$a+b+c=22$

18. 두 점 A$(3,\ 5)$, B$(1,\ 1)$이 있을 때, x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되는 점 P의 좌표와 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은?

① $\mathrm{P}\left(\frac{5}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

② $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

③ $\mathrm{P}(1,\ 0)$, $2\sqrt{10}$

④ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $\sqrt{10}$

⑤ $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$, $2\sqrt{10}$

해설

x축 위의 점 P에 대하여
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$가 최소가 되기 위해서는
세 점이 일직선상에 있어야 한다.
따라서 점 B를 X축에 대해 대칭 이동시킨다.
이동된 점 B$'(1,\ -1)$과 점 A와의 거리가
$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값이다.

$$\sqrt{(3-1)^2+(5-(-1))^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

이때 점 P의 좌표는 점 B$'$와 점 A를 지나는 직선의 방정식의 x절편이다.

즉 직선 AB$'$: $y-5=\dfrac{5-(-1)}{3-1}(x-3)$

$\therefore\ y=3x-4$

따라서 점 P의 좌표는 $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ 0\right)$