1. $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+a$가 이차식의 완전제곱이 되도록 a의 값을 정하면?

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 15 ⑤ 16

해설

(준식)$=(x^2-8x+7)(x^2-8x+15)+a$

여기서, $x^2-8x+7=X$로 놓으면

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= X(X+8)+a \\ &= X^2+8X+a=(X+4)^2+a-16\end{aligned}$$

따라서 $a=16$

2. $a+b+c=7$, $a^2+b^2+c^2=21$, $abc=8$일 때, $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$의 값은?

① 26　② 48　③ 84　④ 96　⑤ 112

해설

$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^c+2(ab+bc+ca)$
$49 = 21+2(ab+bc+ca)$
$\therefore\ ab+bc+ca=14$
$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=(ab+bc+ca)^2-2abc(a+b+c)$
$=(14)^2-2(8\times 7)$
$=84$

3. 두 다항식 $2x^2+px+q$, $4x^2+rx+s$의 최대공약수가 $2x+1$이고 곱이 $8x^4+4x^3-62x^2-61x-15$일 때, $p+q+r+s$의 합은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

두 다항식을 $A=aG$, $B=bG$ (a, b는 서로소)라고 하면
$AB=abG^2$이므로
$8x^4+4x^3-62x^2-61x-15=ab(2x+1)^2$
$\therefore\ 8x^4+4x^2-62x^2-61x-15$
$=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2(8x^2-4x-60)$
$=(2x+1)^2(2x^2-x-15)$
$=(2x+1)^2(x-3)(2x+5)$
즉, $2x^2+px+q=(2x+1)(x-3)=2x^2-5x-3$,
$4x^2+rx+s=(2x+1)(2x+5)=4x^2+12x+5$이므로
$p=-5,\ q=-3,\ r=12,\ s=5$
$\therefore\ p+q+r+s=9$

4. x의 이차방정식 $x^2-3px+4q-2=0$의 두 실근의 비가 $1:2$가 되도록 하는 실수 p, q에 대하여 q의 값의 범위는? (단, $p \neq 0$)

① $q \geq -\frac{1}{3}$
② $q > \frac{1}{2}$
③ $q \geq \frac{1}{2}$
④ $q > -\frac{1}{2}$
⑤ $q \geq \frac{2}{3}$

해설

두 근을 α, 2α라 하면

$\alpha + 2\alpha = 3p \quad \therefore \ \alpha = p$

$\alpha \cdot 2\alpha = 4q-2 \quad \therefore \ \alpha^2 = 2q-1$

따라서 $p^2 = 2q-1$

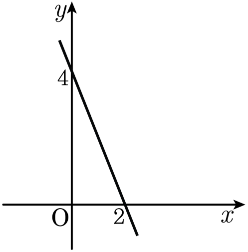
한편 $\mathrm{D} > 0$에서 $9p^2-4(4q-2) > 0$

$9(2q-1)-16q+8 > 0$

$2q-1 > 0$

$\therefore \ q > \frac{1}{2}$

5. 일차함수 $y = ax + b$ 의 그래프가 다음과 같을 때, 이차함수 $y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$ 의 최솟값을 구하면?



① 4 ② −4 ③ 8

④ −8 ⑤ 0

해설

기울기 $a = -2$, y 절편 $b = 4$

$$y = -\frac{1}{4}ax^2 - bx + 4$$
$$= \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4$$
$$= \frac{1}{2}(x-4)^2 - 4$$

$x = 4$ 일 때, 최솟값은 -4 이다.

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 3$ 일 때, 최솟값 -4 를 가지며 점 $(1,\ 2)$ 를 지난다. 이 때, $a - b - c$ 의 값은?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

꼭짓점이 $(3,\ -4)$ 이므로 $y = a(x-3)^2 - 4$

$(1,\ 2)$ 를 대입하면

$2 = 4a - 4$

$\therefore a = \frac{3}{2}$

$y = \frac{3}{2}(x-3)^2 - 4 = \frac{3}{2}x^2 - 9x + \frac{19}{2}$

$a = \frac{3}{2},\ b = -9,\ c = \frac{19}{2}$

$\therefore\ a - b - c = \frac{3}{2} - (-9) - \frac{19}{2} = 1$

7. 어떤 수공예 업자가 만든 수공예품의 원가는 15000 원이다. 시장 조사를 하였더니 정가를 25000 원으로 하면 하루에 200 개를 팔 수 있고, 500 원씩 정가를 내릴 때마다 20 개씩 더 팔 수 있다고 한다. 최대 이윤을 얻으려면 정가를 얼마로 해야 하는가?

① 22500 원 ② 23000 원 ③ 23500 원

④ 24000 원 ⑤ 24500 원

해설

한 개의 이윤을 x원이라 하면

팔리는 제품의 개수는

$$200+\frac{10000-x}{500}\times 20=600-\frac{x}{25}$$

총 이윤을 p라 하면

$$p=x\left(600-\frac{x}{25}\right)=-\frac{x^2}{25}+600x$$

$$=-\frac{1}{25}(x^2-15000x)$$

$$=-\frac{1}{25}(x-7500)^2+2250000$$

따라서 한 개의 이윤이 7500 원일 때,

최대 이윤을 얻을 수 있으므로 정가는

$15000+7500=22500$(원)

8. 연립방정식 $x+y+z=-\frac{1}{2}$, $xy+yz+zx=-\frac{5}{2}$, $xyz=-1$을 만족시키는 해의 쌍 (x, y, z)의 개수는?

① 3개 ② 4개 ③ 5개 ④ 6개 ⑤ 7개

해설

근과 계수와의 관계에서
x, y, z를 세 근으로 하는
삼차방정식을 만들면

$$t^3+\frac{1}{2}t^2-\frac{5}{2}t+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2t^3+t^2-5t+2=0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2t-1)(t+2)=0$$

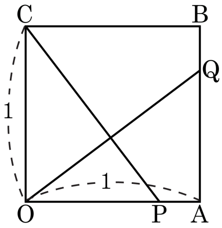
$$\therefore\ (x, y, z)=$$

$$\left(1, \frac{1}{2}, -2\right),\ \left(1, -2, \frac{1}{2}\right),$$

$$\left(\frac{1}{2}, 1, -2\right),\ \left(\frac{1}{2}, -2, 1\right),$$

$$\left(-2, 1, \frac{1}{2}\right),\ \left(-2, \frac{1}{2}, 1\right)$$

9. 다음 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정사각형 OABC 의 두 변 $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ 위에 각각 점 P, Q 를 $\overline{OP} = \overline{AQ}$ 가 되도록 잡을때, ($\overline{CP}$ 의 기울기) × ($\overline{OQ}$ 의 기울기)를 구하면?



① $-\dfrac{1}{2}$　② -1　③ $\dfrac{1}{2}$

④ 1　⑤ 2

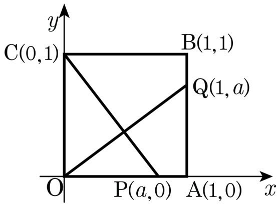
해설

정사각형 OABC 에 다음 그림과 같이 좌표축을 잡으면 ($\overline{CP}$ 의 기울기)$= \dfrac{-1}{a}$,

($\overline{OQ}$ 의 기울기)$= \dfrac{a}{1}$

따라서, 두 직선의 기울기의 곱은

$\left(\dfrac{-1}{a}\right) \times \left(\dfrac{a}{1}\right) = -1$

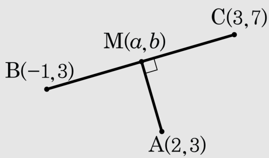


10. 점 $A(2,\ 3)$ 에서 두 점 $B(-1,\ 3)$, $C(3,\ 7)$ 을 이은 선분 BC 에 내린 수선의 발을 $M(a,\ b)$ 라 할 때, $4ab$ 의 값은?

① 7　② 9　③ 11　④ 13　⑤ 15

해설

$\overline{BC} \perp \overline{AM}$ 이므로 두 직선의 기울기의 곱은 -1 이다.



즉, $\dfrac{7-3}{3-(-1)} \times \dfrac{b-3}{a-2} = -1$

$b-3 = -(a-2),\quad \therefore\ a+b=5 \cdots$ ㉠

한편, 직선 BC 의 방정식은

$y-3 = \dfrac{7-3}{3-(-1)}(x+1)$

$\therefore\ y = x+4$

이 때, 점 M 이 $\overline{BC}$ 위의 점이므로

$b = a+4 \cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하여 풀면 $a = \dfrac{1}{2}$, $b = \dfrac{9}{2}$

$\therefore\ 4ab = 4 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{9}{2} = 9$

11. 두 정점 $A(-\sqrt{2},\ 0)$, $B(\sqrt{2},\ 0)$ 가 있다. 조건 $2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$ 를 만족시키는 점 $P(x,\ y)$ 의 자취는 원이다. 이 원의 반지름은?

① 2　　② 3　　③ 4　　④ 5　　⑤ 6

해설

$2\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = 9$

$2\left\{(x+\sqrt{2})^2+y^2\right\} - \left\{(x-\sqrt{2})^2+y^2\right\} = 9$

이것을 정리하면, $(x+3\sqrt{2})^2+y^2=25$

점 P 의 자취는 점 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ 을 중심으로 하고,

반지름이 5 인 원이다.

12. 집합 $A = \{x \mid 15 < x < 30,\ x = 3n + 2(n\text{은 자연수})\}$라고 할 때, 적어도 한 개의 짝수를 원소로 갖는 부분집합의 개수는?

① 8 개 ② 16 개 ③ 24 개 ④ 32 개 ⑤ 40 개

해설

$\mathrm{A} = \{17,\ 20,\ 23,\ 26,\ 29\}$이므로 집합 A 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이고, 이 중에서 짝수를 원소로 하나도 갖지 않는 부분집합은 원소 17, 23, 29 로 만든 부분집합이므로 $2^3 = 8$ (개) 이다.

$\therefore\ 32 - 8 = 24$ (개)

13. 두 집합 $A=\{a,\ 5,\ a+6\}$, $B=\left\{x|x\text{는 14의 약수}\right\}$ 에서 $A\cap B=\{1,\ 7\}$ 일 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$1\in A$ 이므로 $a=1$ 또는$a+6=1$ 이다.
(i) $a=1$ 이면 $A=\{1,5,7\}$, $A\cap B=\{1,7\}$ 이다.
$\therefore\ a=1$
(ii) $a+6=1$ 즉, $a=-5$ 이면 $A=\{-5,\ 1,\ 5\}$, $A\cap B=\{1\}$ 이므로 조건에 맞지 않는다.
그러므로 $a=1$ 이다.

14. 전체집합 $U = \{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여

$A = \{1,3,5,7\}, A \cap B = \{3,5\}, B \cap A^c = \{2,4,6\}, A^c \cap B^c = \{8,9,10\}$

일 때, B^c 은?

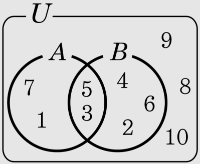
① $\{1,7\}$ ② $\{1,8\}$ ③ $\{1,7,9,10\}$

④ $\{1,7,8,10\}$ ⑤ $\{1,7,8,9,10\}$

해설

$B \cap A^c = \{2,4,6\} = B - A$ 이므로

$B^c = U - B = \{1,7,8,9,10\}$ 이다.



15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 50$, $n(A) = 30$, $n(B) = 28$, $n(A^c \cap B^c) = 8$ 일 때, $n(A-B)+n(B-A)$ 의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26 ④ 28 ⑤ 30

해설

$$n(A^c \cap B^c) = n(A \cup B)^c$$
$$= n(U) - n(A \cup B) = 8$$
$$\therefore n(A \cup B) = 42$$
$$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$$
$$= 30 + 28 - 42 = 16$$
$$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$
$$= 42 - 16 = 26$$

16. 세 권의 책 A, B, C 가 있다. A를 읽은 학생은 5명, B를 읽은 학생은 4명, C를 읽은 학생은 7명, A와 B를 모두 읽은 학생은 3명, 세 권을 모두 읽은 학생은 2명일 때, C만 읽은 학생의 수가 가장 적을 경우는 몇 명인가?

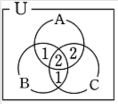
① 1 명 ② 2 명 ③ 3 명 ④ 4 명 ⑤ 5 명

해설

집합 A, B, C를 각각 책 A, B, C를 읽은 학생들의 집합이라 하면

$n(A)=5$, $n(B)=4$, $n(C)=7$, $n(A\cap B)=3$, $n(A\cap B\cap C)=2$

C만 읽는 학생수가 가장 적을 때는 A와 C, B와 C를 읽은 학생 수가 가장 많은 경우로 벤다이어그램에서



$7-(2+2+1)=2$(명)

17. 좌표평면 위의 점 $A(1,\ 2)$를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0,\ b>0)$이 x축, y축과 만나는 점을 각각 B, C라 할 때, $\triangle OBC$의 최소 넓이는?

① 3 ② 3.5 ③ 4 ④ 4.5 ⑤ 5

해설

$B(a,\ 0)$, $C(0,\ b)$이므로
$\triangle OBC$의 넓이를 S라 하면

$S=\frac{1}{2}ab\cdots\cdots$ ㉠

직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$은 점 $(1,\ 2)$를 지나므로

$\frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$1=\frac{1}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{2}{ab}}=2\sqrt{\frac{1}{S}}$

$\therefore\ S\geq 4$

18. 퀴즈대회에 나간 호준이는 다음에 주어진 마지막 문제를 맞히면 우승이다. 호준이가 우승할 수 있는 답을 고르면?

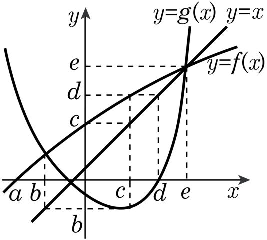
> 집합 $\mathrm{A} = \{a,\ b,\ c\}$일 때, A에서 A로의 함수 $f : \mathrm{A} \to \mathrm{A}$에 대하여,
> 함수의 개수는 m개,
> 일대일 대응 함수의 개수는 n개,
> 상수 함수는 s개,
> 항등함수는 r개이다.
> $m+n+s+r$의 값을 구하여라.

① 21　② 27　③ 33　④ 37　⑤ 43

해설

함수의 개수는 $3^3 = 27$(가지)　$\therefore\ m = 27$
일대일 대응의 개수는
$3 \times 2 \times 1 = 6$(가지) $\therefore\ n = 6$
상수함수의 개수는 치역이 a, b, c인 경우의 3가지
$\therefore\ s = 3$
항등함수의 개수는 1가지 $\therefore\ r = 1$
따라서 $m+n+s+r = 27+6+3+1 = 37$

19. 다음 그림은 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 함수 $h(x)=(f^{-1}\circ g\circ f)(x)$일 때, $h(c)$의 값은?



① a ② b ③ c

④ d ⑤ e

해설

$$h(c)=(f^{-1}\circ g\circ f)(c)=f^{-1}(g(f(c)))$$
$$=f^{-1}(g(d))=f^{-1}(0)$$

$f^{-1}(0)=k$라 하면 $f(k)=0$

$\therefore k=a$

따라서 $h(c)=a$

20. $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}=\frac{a}{100}$, $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}=\frac{b}{101}$ 일 때, $a+b$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 149

해설

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 100}$$
$$=\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{98}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{100}\right)=1-\frac{1}{100}$$
$$=\frac{99}{100}=\frac{a}{100}$$
$\therefore\ a=99$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{99\cdot 101}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{97}-\frac{1}{99}\right)+\left(\frac{1}{99}-\frac{1}{101}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{101}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{100}{101}=\frac{50}{101}=\frac{b}{101}$$
$\therefore\ b=50$

$\therefore\ a+b=149$

21. $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ 일 때, $\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=k(\neq 0)$ 로 놓으면 $a=bk,\ b=ck$

$\therefore\ a=ck^2$

$$\frac{(a-b)(b+c)}{(a+b)(b-c)}=\frac{(ck^2-ck)(ck+c)}{(ck^2+ck)(ck-c)}$$

$$=\frac{ck(k-1)\cdot c(k+1)}{ck(k+1)\cdot c(k-1)}=1$$

22. 전 구간을 일정한 속도 60 km/h 로 달리도록 되어 있는 어느 고속도로에서 하행하던 고속버스가 5 분 동안에 상행하는 같은 회사 소속의 고속버스 20 대를 보았다. 이 고속버스의 배차 간격이 일정할 때, 100 km 의 상행선에는 약 몇 대의 고속버스가 달리고 있는가?

① 50 대　② 100 대　③ 120 대　④ 150 대　⑤ 200 대

해설

각 방향으로 시속 60 km로 달리고 있으므로 어느 한 방향에 대한 다른 방향의 상대 속도는 시속 120 km이다.

이때, 5분 동안의 주행 거리는 $120\times\frac{5}{60}=120\times\frac{1}{12}=10(\text{km})$이고, 이 사이를 달리는 동안에 20대의 버스를 보았으므로 100 km의 구간에는 200대가 있다.