1. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

ⅰ) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수
: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,
계수$=2$
: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,
계수$=1$
ⅱ) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수
$x+x^2+x^3=Y$라 하면,
$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$
$3Y=3x+3x^2+3x^3$
일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.
ⅰ), ⅱ) 에서 $2+1+3=6$

2. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$ 이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a 의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2
④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x - 1$ 또는 $x + 1$ 뿐이다.
(ⅰ) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$
(ⅱ) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

3. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88　② 100　③ 124　④ 148　⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면
$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$
또, 대각선의 길이는
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로
$x^2+y^2+z^2=77$
이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고
$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로
$77=15^2-2(xy+yz+zx)$
$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$
따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

4. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\bar{z}$ 의 값은?
(단, $\bar{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7　② 6　③ 5　④ 4　⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\ &= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\ &= 7 \end{aligned}$$

5. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때,
$\alpha+\beta=3$
한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha$, $2x+1=\beta$
즉, $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha+\beta=3$
$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면
$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$
$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\frac{\alpha-1}{2}$, $\frac{\beta-1}{2}$
$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$

6. 둘레의 길이가 $32\,\mathrm{cm}$ 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답： cm

▷ 정답： $8\,\mathrm{cm}$

해설

가로의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$, 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면,

$$\begin{aligned} y &= x(16-x) \\ &= -x^2+16x \\ &= -(x^2-16x) \\ &= -(x-8)^2+64 \end{aligned}$$

따라서 가로의 길이가 $8\,\mathrm{cm}$ 일 때, 넓이가 최대이다.

7. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α,β,γ라 한다. $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α,β,γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$$

$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α,β,γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta},\frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\frac{7}{2}, -1,\ 1,\ \frac{7}{2}$　② $-\frac{7}{2},\ \frac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\frac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \frac{7}{2}$

해설

㉠ $-$ ㉡ $\times 8$ 에서 $x^2-11xy-26y^2=0,\ (x+2y)(x-13y)=0$

$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢

$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm 1,\ x=\mp 2$(복호동순)

㉡, ㉣에서 $16y^2=1$

$\therefore\ y=\pm\frac{1}{4},\ x=\pm\frac{13}{4}$(복호동순)

$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \frac{7}{2},\ -\frac{7}{2}$

9. 세 점 $\mathrm{A}(6, 2)$ $\mathrm{B}(0, -6)$, $\mathrm{C}(7, -5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a, b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24　② -18　③ -12　④ 9　⑤ 21

해설

$\overline{\mathrm{BC}}^2 + \overline{\mathrm{CA}}^2 = \overline{\mathrm{AB}}^2$ 이므로 $\angle \mathrm{C} = 90\,°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{\mathrm{AB}}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\frac{6+0}{2}, \frac{2+(-6)}{2}\right) = (3, -2)$

$\therefore\ 3ab = -18$

10. 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서 직선 $2x - y = 0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은 ? (단, $ab < 0$)

① -4　　② -2　　③ 0　　④ 2　　⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서
직선 $2x - y = 0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}} = \frac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|2a| = |-b|$,$ab < 0$ 이므로
$2a = -b,\ \therefore\ b = -2a$

따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b} = \dfrac{2a+2a}{a-2a} = \dfrac{4a}{-a} = -4$

11. 대칭이동에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

Ⅰ. 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식 은 $f(-x,\ -y)=0$ 이다.
Ⅱ. 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 직선 $x=a$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은 $f(x-2a,\ y)=0$ 이다.
Ⅲ. 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시킨 도형은 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.
Ⅳ. 방정식 $f(x,\ y)=0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형은 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.

① Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ　② Ⅰ, Ⅳ　③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅲ, Ⅳ　⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $f(x,\ y)=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y)=0$
Ⅱ. $f(x,\ y)=0$ 을 $x=a$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(2a-x,\ y)=0$
Ⅲ. $f(x,\ y)=0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(x,\ -y)=0$
$f(x,\ -y)=0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-x,\ -y)=0$
$f(x,\ y)=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y)=0$
Ⅳ. $f(x,\ y)=0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y)=0$
$f(x,\ y)=0$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-y,\ -x)=0$
$f(x,\ y)=0$ 을 직선 $y=-x$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-y,\ -x)=0$
이로부터 옳은 것은 Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ이다.

12. 집합 $A = \{2, 4, 6, 8\}$ 의 부분집합을 B 라고 할 때, $n(B) = 2$ 인 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ______ 개

▷ 정답: 6개

해설

원소가 2 개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{4, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{6, 8\}$ 이므로 모두 6 개 이다.

13. 임의의 집합 X에 대하여 집합 A, B가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$를 만족할 때, 다음 중 집합 A, B의 관계로 옳은 것은?

① $A = B$　　② $A \subset B^c$　　③ $A \cup B = U$
④ $A = \varnothing$　　⑤ $A \cap B = \varnothing$

해설

집합 X가 임의의 집합이므로 $X = \varnothing$일 때와 $X = U$(U는 전체 집합) 일 때를 생각해 본다.

ⅰ) $X = \varnothing$일 때, $A \cap (B \cup \varnothing) = A \cap B$,
　$A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$이므로 $A \cap B = A$
　$\therefore\ A \subset B$

ⅱ) $X = U$일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$,
　$A \cup (B \cap U) = A \cup B$이므로 $A = A \cup B$
　$\therefore\ B \subset A$

ⅰ), ⅱ)에서 $A = B$

또, 역으로 $A = B$이면 주어진 식을 만족한다.

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 34$, $n(A^c \cap B^c) = 11$, $n(B - (A \cap B)^c) = 6$ 일 때, $n((A \cup B) - (A \cap B))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$n(U) = 34$ 이고 $n(A^c \cap B^c) = 11$ 이면, $n(A \cup B) = 23$,
$B - (A \cap B)^c = A \cap B$ 이므로 $n(B - (A \cap B)^c) = n(A \cap B) = 6$,
$\therefore n((A \cup B) - (A \cap B)) = 23 - 6 = 17$

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 30$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21$, $n(A \cup B) = 25$ 일 때, $n(A^c \cup B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로
$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21$ 이고 $n(A \cup B) = 25$ 이면 $n(A \cap B) = 4$ 이다.
$\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = 30 - 4 = 26$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 32

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 3 = 37$

$$\begin{aligned} n(A - B) + n(B - A) &= n(A \cup B) - n(A \cap B) \\ &= 37 - 5 = 32 \end{aligned}$$

17. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 23$, $n(B) = 39$, $n(A \cup B) = 62$일 때, 다음 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호가 <u>아닌</u> 것을 모두 고르면?

보기

$A - B \; \boxed{} \; A$

① $\in$　② $\subset$　③ $\supset$　④ $\not\subset$　⑤ $=$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$62 = 23 + 39 - n(A \cap B)$에서 $n(A \cap B) = 0$이므로 $A \cap B = \varnothing$이다.

$A - B \boxed{} \; A$에서 $\boxed{}$ 안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset$, $\supset$, $=$이다.

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면
$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdot \cdots \cdot a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$이므로 $f(x)$는 감소함수

19. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x)\neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는
$f(1)$: 4 가지
$f(2)$: 3 가지
$f(3)$: 2 가지
$\therefore\ 4\times3\times2=24$ (가지)
그런데 $f(3)=3$ 인 것이 6 가지 이므로
$f(x)\neq x$ 인 것은
$\therefore\ 24-6=18$ (가지)

20. $f\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$f^{-1}(3x-1)=\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 이므로

$3x-1=11$ 에서 $x=4$

$\therefore\ f^{-1}(11)=\frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}$

$=-3$

21. 함수 $f(x)=x^2-4x+6(x\geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
$x^2-4x+6=x$ 에서
$x^2-5x+6=0, (x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2,2),(3,3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

해설

$x^2-4x+6=x$,
즉 $x^2-5x+6=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=6$
따라서 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha,\alpha),(\beta,\beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$=\sqrt{2}\sqrt{5^2-4\cdot 6}=\sqrt{2}$

22. $a+\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$a^2+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore\ a^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1$$

$$a^5=a^4\cdot a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)^2\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-a\right)\cdot a$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-a^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)=1$$