1. 다음 다항식의 일차항의 계수는?

$$(1+x+x^2)^2(1+x)+(1+x+x^2+x^3)^3$$

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

i) $(1+x+x^2)^2(x+1)$ 의 일차항의 계수

: $(1+x+x^2)^2$ 의 일차항에 1을 곱할 때,

계수$=2$

: $(1+x+x^2)^2$ 의 상수항에 x를 곱할 때,

계수$=1$

ii) $(1+x+x^2+x^3)^3$ 의 일차항의 계수

$x+x^2+x^3=Y$라 하면,

$(Y+1)^3=Y^3+3Y^2+3Y+1$

$3Y=3x+3x^2+3x^3$

일차항의 계수$=3$, 다른 항에는 일차항이 없다.

i), ii) 에서 $2+1+3=6$

2. x 의 다항식 $f(x) = x^5 - ax - 1$이 계수가 정수인 일차인수를 갖도록 정수 a의 값을 구하면?

① $a = 0$ 또는 2 ② $a = 1$ 또는 2 ③ $a = -1$ 또는 2

④ $a = 0$ 또는 1 ⑤ $a = 0$ 또는 -2

해설

상수항이 -1 이므로 만일 일차인수가 있다면 그것은 $x-1$ 또는 $x+1$ 뿐이다.

(i) $f(1) = 1 - a - 1 = 0$ 에서 $a = 0$

(ii) $f(-1) = -1 + a - 1 = 0$ 에서 $a = 2$

3. 모든 모서리의 길이의 합이 60이고, 대각선의 길이가 $\sqrt{77}$인 직육면체의 겉넓이는?

① 88 ② 100 ③ 124 ④ 148 ⑤ 160

해설

직육면체의 가로의 길이, 세로의 길이, 높이를 각각 x, y, z라고 하면

$4(x+y+z)=60$에서 $x+y+z=15$

또, 대각선의 길이는

$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{77}$이므로

$x^2+y^2+z^2=77$

이 때, 직육면체의 겉넓이는 $2(xy+yz+zx)$이고

$x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)$이므로

$77=15^2-2(xy+yz+zx)$

$\therefore\ 2(xy+yz+zx)=225-77=148$

따라서, 직육면체의 겉넓이는 148이다.

4. 방정식 $x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 할 때, $z=\dfrac{3w+1}{w+1}$ 이라 하면, $z\overline{z}$ 의 값은?
(단, $\overline{z}$ 는 z 의 켤레복소수)

① 7 ② 6 ③ 5 ④ 4 ⑤ 3

해설

$x^2+x+1=0$ 의 한 근을 w 라 하면, 다른 근은 $\overline{w}$ 이다.

$w+\overline{w}=-1,\ w\overline{w}=1$

$$
\begin{aligned}
z\overline{z} &= \frac{3w+1}{w+1}\cdot\frac{3\overline{w}+1}{\overline{w}+1} \\
&= \frac{9w\overline{w}+3(w+\overline{w})+1}{w\overline{w}+(w+\overline{w})+1} \\
&= 7
\end{aligned}
$$

5. 이차방정식 $f(x)=0$의 두 근의 합이 3일 때, 방정식 $f(2x+1)=0$의 두 근의 합을 구하면?

① $\frac{1}{2}$ ② 2 ③ $\frac{1}{3}$ ④ 3 ⑤ $\frac{1}{4}$

해설

이차방정식 $f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때,

$\alpha+\beta=3$

한편, $f(2x+1)=0$의 두 근은 $2x+1=\alpha,\ 2x+1=\beta$

즉, $x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$이다.

$$\frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

해설

$f(x)=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때, $\alpha+\beta=3$

$f(x)=k(x-\alpha)(x-\beta)$라 하면

$f(2x+1)=k(2x+1-\alpha)(2x+1-\beta)$

$f(2x+1)=0$의 두 근은 $x=\dfrac{\alpha-1}{2},\ \dfrac{\beta-1}{2}$

$$\therefore \frac{\alpha-1}{2}+\frac{\beta-1}{2}=\frac{\alpha+\beta-2}{2}=\frac{3-2}{2}=\frac{1}{2}$$

6. 둘레의 길이가 32 cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되는 직사각형의 가로의 길이를 구하여라.

▶ 답 : ______ cm

▷ 정답 : 8 cm

해설

가로의 길이를 x cm, 넓이를 y cm^2 라 하면,

$$
\begin{aligned}
y &= x(16-x) \\
&= -x^2+16x \\
&= -(x^2-16x) \\
&= -(x-8)^2+64
\end{aligned}
$$

따라서 가로의 길이가 8 cm 일 때, 넓이가 최대이다.

7. $x^3+2x^2+3x+1=0$의 세 근을 α, β, γ라 한다. $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$을 근으로 하는 삼차방정식이 $x^3+ax^2+bx+c=0$일 때, abc의 값을 구하면?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0$의
세 근이 α, β, γ이므로
$\alpha+\beta+\gamma=-2$,
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$,
$\alpha\beta\gamma=-1$

$$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}=\frac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=-3,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\alpha\beta\gamma}=2,$$

$$\frac{1}{\alpha\beta\gamma}=-1$$

따라서 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$를 세 근으로 하는
삼차항의 계수가 1인 방정식은
$x^3+3x^2+2x+1=0$
$\Leftrightarrow x^3+ax^2+bx+c=0$
$\therefore a=3, b=2, c=1$

해설

$x^3+2x^2+3x+1=0 \cdots\cdots$ ①
$x=\frac{1}{X}$로 놓으면

$$\left(\frac{1}{X}\right)^3+2\cdot\left(\frac{1}{X}\right)^2+3\cdot\left(\frac{1}{X}\right)+1=0$$

$\therefore\ X^3+3X^2+2X+1=0 \cdots\cdots$ ②
①의 세 근이 α, β, γ이므로
②의 세 근은 $\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}, \frac{1}{\gamma}$이다.
$\therefore$구하는 방정식은
$X^3+3X^2+2X+1=0$에서
$abc=3\cdot2\cdot1=6$

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2-3xy-2y^2=8 \cdots\cdots ㉠ \\ xy+3y^2=1 \quad \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$ 의 근 x, y를 구할 때, $x+y$의 값을 모두 구하면?

① $-\dfrac{7}{2}, -1,\ 1,\ \dfrac{7}{2}$　② $-\dfrac{7}{2},\ \dfrac{7}{2}$　③ $-1,\ 1$
④ $-\dfrac{7}{2},\ 1$　⑤ $1,\ \dfrac{7}{2}$

해설

㉠ − ㉡ × 8 에서 $x^2-11xy-26y^2=0,\ (x+2y)(x-13y)=0$

$x+2y=0 \cdots\cdots$ ㉢

$x-13y=0 \cdots\cdots$ ㉣

㉡, ㉢에서 $y^2=1$

$\therefore\ y=\pm1,\ x=\mp2$(복호동순)

㉡, ㉣에서 $16y^2=1$

$\therefore\ y=\pm\dfrac{1}{4},\ x=\pm\dfrac{13}{4}$(복호동순)

$\therefore\ x+y=-1,\ 1,\ \dfrac{7}{2},\ -\dfrac{7}{2}$

9. 세 점 $A(6,2)$ $B(0,-6)$, $C(7,-5)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 외심의 좌표를 (a,b) 라 할 때, $3ab$ 의 값을 구하면?

① -24 ② -18 ③ -12 ④ 9 ⑤ 21

해설

$\overline{BC}^2 + \overline{CA}^2 = \overline{AB}^2$ 이므로 $\angle C = 90°$ 인 직각삼각형이다.

$\therefore$ 빗변 $\overline{AB}$ 의 중점이 외심이다.

$\left(\dfrac{6+0}{2}, \dfrac{2+(-6)}{2}\right) = (3,-2)$

$\therefore\ 3ab = -18$

10. 두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서 직선 $2x-y=0$ 까지의 거리가 같을 때, $\dfrac{2a-b}{a+b}$ 의 값은? (단, $ab<0$)

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

두 점 $(a,\ 0)$, $(0,\ b)$ 에서
직선 $2x-y=0$
까지의 거리가 같으므로,

$$\frac{|2a-0|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{|0-b|}{\sqrt{2^2+1^2}}$$

$|2a|=|-b|$,$ab<0$ 이므로

$2a=-b,\ \therefore\ b=-2a$

따라서, $\dfrac{2a-b}{a+b}=\dfrac{2a+2a}{a-2a}=\dfrac{4a}{-a}=-4$

11. 대칭이동에 대한 다음 설명 중 옳은 것을 모두 고른 것은?

> Ⅰ. 방정식 $f(x,\ y) = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식 은 $f(-x,\ -y) = 0$ 이다.
> Ⅱ. 방정식 $f(x,\ y) = 0$ 이 나타내는 도형을 직선 $x = a$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형의 방정식은 $f(x-2a,\ y) = 0$ 이다.
> Ⅲ. 방정식 $f(x,\ y) = 0$ 이 나타내는 도형을 x 축에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 y 축에 대하여 대칭이동시킨 도형은 원점에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.
> Ⅳ. 방정식 $f(x,\ y) = 0$ 이 나타내는 도형을 원점에 대하여 대칭이동시킨 후, 다시 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형은 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동시킨 도형과 일치한다.

① Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ ② Ⅰ, Ⅳ ③ Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
④ Ⅲ, Ⅳ ⑤ Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ

해설

Ⅰ. $f(x,\ y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y) = 0$
Ⅱ. $f(x,\ y) = 0$ 을 $x = a$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(2a-x,\ y) = 0$
Ⅲ. $f(x,\ y) = 0$ 을 x 축에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(x,\ -y) = 0$
$f(x,\ -y) = 0$ 을 y 축에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-x,\ -y) = 0$
$f(x,\ y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y) = 0$
Ⅳ. $f(x,\ y) = 0$ 을 원점에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow\ f(-x,\ -y) = 0$
$f(x,\ y) = 0$ 을 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-y,\ -x) = 0$
$f(x,\ y) = 0$ 을 직선 $y = -x$ 에 대하여 대칭이동
$\Rightarrow f(-y,\ -x) = 0$
이로부터 옳은 것은 Ⅰ, Ⅲ, Ⅳ이다.

12. 집합 $A=\{2,4,6,8\}$ 의 부분집합을 B 라고 할 때, $n(B)=2$ 인 집합 B 의 개수를 구하여라.

▶ 답: ____개

▷ 정답: 6개

해설

원소가 2 개인 집합 A 의 부분집합은 $\{2,4\}$, $\{2,6\}$, $\{2,8\}$, $\{4,6\}$, $\{4,8\}$, $\{6,8\}$ 이므로 모두 6 개이다.

13. 임의의 집합 X에 대하여 집합 A, B가 $A \cap (B \cup X) = A \cup (B \cap X)$를 만족할 때, 다음 중 집합 A, B의 관계로 옳은 것은?

① $A = B$ ② $A \subset B^c$ ③ $A \cup B = U$

④ $A = \varnothing$ ⑤ $A \cap B = \varnothing$

해설

집합 X가 임의의 집합이므로 $X = \varnothing$일 때와 $X = U$(U는 전체 집합)일 때를 생각해 본다.

i) $X = \varnothing$일 때, $A \cap (B \cup \varnothing) = A \cap B$,

$A \cup (B \cap \varnothing) = A \cup \varnothing = A$이므로 $A \cap B = A$

$\therefore \ A \subset B$

ii) $X = U$일 때, $A \cap (B \cup U) = A \cap U = A$,

$A \cup (B \cap U) = A \cup B$이므로 $A = A \cup B$

$\therefore \ B \subset A$

i), ii)에서 $A = B$

또, 역으로 $A = B$이면 주어진 식을 만족한다.

14. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U)=34$, $n(A^c \cap B^c)=11$, $n(B-(A\cap B)^c)=6$ 일 때, $n((A\cup B)-(A\cap B))$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 17

해설

$n(U)=34$ 이고 $n(A^c\cap B^c)=11$ 이면, $n(A\cup B)=23$,
$B-(A\cap B)^c=A\cap B$ 이므로 $n(B-(A\cap B)^c)=n(A\cap B)=6$,
$\therefore n((A\cup B)-(A\cap B))=23-6=17$

15. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 30$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21$, $n(A \cup B) = 25$ 일 때, $n(A^c \cup B^c)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 26

해설

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B)$ 이므로
$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 21$ 이고 $n(A \cup B) = 25$ 이면 $n(A \cap B) = 4$ 이다.
$\therefore n(A^c \cup B^c) = n((A \cap B)^c) = 30 - 4 = 26$

16. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $n(U) = 40$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A^c \cap B^c) = 3$ 일 때, $n(A - B) + n(B - A)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 32

해설

$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c$

$n(A \cup B) = n(U) - n((A \cup B)^c) = 40 - 3 = 37$

$$n(A - B) + n(B - A) = n(A \cup B) - n(A \cap B)$$
$$= 37 - 5 = 32$$

17. 두 집합 A, B에 대하여 $n(A) = 23$, $n(B) = 39$, $n(A \cup B) = 62$일 때, 다음 $\boxed{}$안에 들어갈 수 있는 기호가 아닌 것을 모두 고르면?

보기

$A - B \ \boxed{} \ A$

① $\in$ ② $\subset$ ③ $\supset$ ④ $\not\subset$ ⑤ $=$

해설

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

$62 = 23 + 39 - n(A \cap B)$에서 $n(A \cap B) = 0$이므로 $A \cap B = \varnothing$이다.

$A - B \boxed{} \ A$에서 $\boxed{}$안에 들어갈 수 있는 기호는 $\subset$, $\supset$, $=$이다.

18. 양의 실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 임의의 양수 a, b에 대하여 $f(ab) = f(a) + f(b)$ 인 관계를 만족시킬 때, 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $f(1) = 1$

② $f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

③ $f\left(a^2\right) = 2f(a)$

④ $f\left(a^n\right) = nf(a)$

⑤ $x > 1$ 일 때, $f(x) < 0$ 이면 $f(x)$는 감소함수이다.

해설

① $b = 1$ 이라고 하면
$f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1)$
$\therefore\ f(1) = 0$

② $b = \frac{1}{a}$ 이면 $0 = f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

③ $b = a$ 이면 $f(a^2) = f(a \cdot a) = f(a) + f(a) = 2f(a)$

④ ③에 의하여 $f(a^n) = f(a \cdot a \cdots a) = f(a) + f(a) + \cdots + f(a) = nf(a)$

⑤ $ab = x,\ a = y$ 이면 $b = \frac{x}{y}$ 이므로

$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right)$

이 때, $x > y$ 이면 $\frac{x}{y} > 1$이므로 $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

따라서 $f(x) < f(y)$이므로 $f(x)$는 감소함수

19. 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ 에서 집합 $B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ 로의 함수 f 가 일대일 함수이다. f 중에서 임의의 x 에 대하여 $f(x)\neq x$ 인 것의 개수는?

① 14 개 ② 18 개 ③ 20 개 ④ 24 개 ⑤ 27 개

해설

일대일 대응 함수는

$f(1)$: 4 가지

$f(2)$: 3 가지

$f(3)$: 2 가지

$\therefore\ 4\times3\times2=24$ (가지)

그런데 $f(3)=3$ 인 것이 6 가지 이므로

$f(x)\neq x$ 인 것은

$\therefore\ 24-6=18$ (가지)

20. $f\left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)=3x-1$ 을 만족하는 $f(x)$ 에 대하여, $f^{-1}(11)$ 의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$f^{-1}(3x-1)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 이므로

$3x-1=11$ 에서 $x=4$

$$\therefore\ f^{-1}(11)=\frac{1+\sqrt{4}}{1-\sqrt{4}}=-3$$

21. 함수 $f(x)=x^2-4x+6(x\geq 2)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할 때, $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구했을 때, 옳은 것은 무엇인가?

① 1 ② $\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 2 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의 두 교점은
$y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=x$ 의 교점과 같다.
$x^2-4x+6=x$ 에서
$x^2-5x+6=0, (x-2)(x-3)=0$
$\therefore x=2$ 또는 $x=3$
따라서 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의 그래프의
두 교점은 $(2,2), (3,3)$ 이고,
이 두 교점 사이의 거리는
$\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

해설

$x^2-4x+6=x$,
즉 $x^2-5x+6=0$ 의 두 근을 α,β 라 하면
이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여
$\alpha+\beta=5, \alpha\beta=6$
따라서 $y=f(x)$ 와 $y=g(x)$ 의
그래프의 두 교점은 $(\alpha,\alpha), (\beta,\beta)$ 사이의 거리는
$\sqrt{(\alpha-\beta)^2+(\alpha-\beta)^2}=\sqrt{2}\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$
$=\sqrt{2}\sqrt{5^2-4\cdot 6}=\sqrt{2}$

22. $a+\frac{1}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 일 때, a^5 의 값은?

① $-\sqrt{5}$ ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ $\sqrt{5}$

해설

$$a^2+1=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a$$

$$\therefore\ a^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1$$

$$a^5=a^4\cdot a=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)^2\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}a^2-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left\{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)-(\sqrt{5}-1)a+1\right\}\cdot a$$

$$=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}-a\right)\cdot a$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-a^2$$

$$=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}a-1\right)=1$$