1. $x+y+z=4,\ xy+yz+zx=1,\ xyz=2$일 때, $(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$의 값을 구하면?

① 16　② 8　③ 4　④ 2　⑤ 1

해설

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$을

$xy+yz+zx=1$을 이용하여 변형하면

$(xy+yz)(yz+zx)(zx+xy)$

$=(1-zx)(1-xy)(1-yz)$

$=1-(xy+yz+zx)+(x^2yz+xy^2z+xyz^2)-(xyz)^2$

$=1-(xy+yz+zx)+xyz(x+y+z)-(xyz)^2$

$=1-1+2\cdot4-4$

$=4$

※ 위에서 아래의 전개식을 이용하였다.

$(x-a)(x-b)(x-c)$

$=x^3-(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x-abc$

2. $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$가 이차식의 완전제곱식으로 인수분해 될 때, 상수 k의 값을 정하면?

① -1　② 1　③ 0　④ 2　⑤ -2

해설

$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-k$
$= (x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-k$
$= (x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-k$
$x^2+5x = X$로 치환하면
(준식) $= (X+4)(X+6)-k$
$= X^2+10X+24-k$
완전제곱식이 되려면 $24-k=25$
$\therefore\ k=-1$

3. 두 다항식 x^3-2x^2-5x+6과 $3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$의 최대공약수가 이차식일 때, a의 값은?

① 1　② -1　③ 2　④ -2　⑤ 3

해설

$x^3-2x^2-5x+6=(x-1)(x-3)(x+2)$

$3x^3+(a-9)x^2-ax-6a$에

$x=3$ 대입, $81+9a-81-3a-6a=0$

$x=-2$ 대입, $-24+4a-36+2a-6a\neq 0$이므로

$x-1$을 인수로 가져야 한다.

$x=1$ 대입 $3+a-9-a-6a=0,\ a=-1$

4. 이차방정식 $x^2-ax+b=0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 할 때 $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근은 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이다. 이때, a^2+b^2의 값을 구하시오.

▶ 답:

▷ 정답: 5

해설

$x^2-ax+b=0$의 두 근이 $\alpha,\ \beta$이므로

$\alpha+\beta=a,\ \alpha\beta=b$ ······ ㉠

또, $x^2-(2a+1)x+2=0$의 두 근이 $\alpha+\beta,\ \alpha\beta$이므로

$\alpha+\beta+\alpha\beta=2a+1,\ \ (\alpha+\beta)\alpha\beta=2$ ······ ㉡

㉠, ㉡에서 $a+b=2a+1$ ······ ㉢

$ab=2$ ······ ㉣

㉢, ㉣를 연립하여 풀면

$a=1,\ b=2$ 또는 $a=-2,\ b=-1$

5. x 에 대한 이차방정식 $x^2+4kx+5k^2-1=0$ 의 두 실근을 α, β 라고 할 때, α 의 최댓값과 β 의 최솟값의 합을 구하여라. (단, $\alpha \geq \beta$ 이고, k 는 실수이다.)

▶ 답 :

▷ 정답 : 0

해설

주어진 등식 $x^2+4kx+5k^2-1=0 \cdots\cdots$ ㉠ 을 k 에 대하여 정리하면

$5k^2+4xk+\left(x^2-1\right)=0 \cdots\cdots$ ㉡

㉡은 k 에 대한 이차방정식이고 k 가 실수이므로 실근을 갖는다.

따라서, 판별식 D 에 대하여

$\frac{D}{4}=(2x)^2-5\left(x^2-1\right) \geq 0$

$-x^2+5 \geq 0,\ x^2-5 \leq 0$

$\therefore -\sqrt{5} \leq x \leq \sqrt{5} \cdots\cdots$ ㉢

그런데 α, β 는 ㉠의 실근이므로 ㉢의 범위 안에 있어야 한다.

$\therefore -\sqrt{5} \leq \beta \leq \alpha \leq \sqrt{5}$

α 의 최댓값은 $\sqrt{5}$, β 의 최솟값은 $-\sqrt{5}$

따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 0

6. 밑변의 길이와 높이의 합이 28 cm 인 삼각형의 최대 넓이는?

① $90\,\mathrm{cm}^2$ ② $92\,\mathrm{cm}^2$ ③ $94\,\mathrm{cm}^2$

④ $96\,\mathrm{cm}^2$ ⑤ $98\,\mathrm{cm}^2$

해설

삼각형의 밑변의 길이를 $x\,\mathrm{cm}$, 넓이를 $y\,\mathrm{cm}^2$ 라 하면

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2}x(28-x) \\ &= \frac{1}{2}(-x^2+28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x^2-28x) \\ &= -\frac{1}{2}(x-14)^2+98 \end{aligned}$$

7. 지면으로부터 45m 높은 곳에서 초속 40m 로 쏘아올린 물체의 x 초 후의 높이를 ym 라 할 때, $y = 45 + 40x - 5x^2$ 인 관계가 성립한다. 쏘아올린 물체가 다시 45m 지점을 지나는 시간은 몇 초 후인지 구하여라.

▶ 답: ________ 초 후

▷ 정답: 8초 후

해설

$y = 45$ 를 대입하면

$45 = 45 + 40x - 5x^2$

$5x^2 - 40x = 0$

$x^2 - 8x = 0$

$x(x - 8) = 0$

$x = 0$ 또는 $x = 8$

따라서 45m 지점을 지나는 시간은 8 초 후이다.

8. α, β, γ가 삼차방정식 $x^3-ax-3=0$의 세 근일 때, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}, \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}, \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를 세 근으로 하는 삼차 방정식을 구하면?

① $3x^3-ax^2+1=0$ ② $x^3-ax-3=0$
③ $3x^3+ax^2+1=0$ ④ $x^3+ax+3=0$
⑤ $3x^3-ax^2-1=0$

해설

x^3-ax-3
$=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$
$=0$에서
$\alpha+\beta+\gamma=0,$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-a,\ \alpha\beta\gamma=3$
$\therefore\ \frac{\alpha+\beta}{\gamma^2}=-\frac{\gamma}{\gamma^2}=-\frac{1}{\gamma},$
$\frac{\beta+\gamma}{\alpha^2}=-\frac{\alpha}{\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha},$
$\frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}=-\frac{\beta}{\beta^2}=-\frac{1}{\beta}$
따라서, $\frac{\alpha+\beta}{\gamma^2},\ \frac{\beta+\gamma}{\alpha^2},\ \frac{\alpha+\gamma}{\beta^2}$를
세 근으로 하는 방정식은
$\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\left(x+\frac{1}{\beta}\right)\left(x+\frac{1}{\gamma}\right)$
$=x^3+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)x^2$
$+\left(\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\alpha\gamma}\right)x+\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$
$=x^3+\left(-\frac{a}{3}\right)x^2+\frac{1}{3}=0$
$\therefore\ 3x^3-ax^2+1=0$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 5x+7 \le 2x-2 \\ 2ax-2b \ge bx+4a \end{cases}$ 의 해가 $x \le -3$ 일 때, $\frac{a}{b}$ 의 값을 구하면?

① 3　　② $\frac{5}{2}$　　③ $\frac{3}{14}$　　④ $\frac{1}{10}$　　⑤ 5

해설

$5x+7 \le 2x-2,\ 3x \le -9,\ x \le -3\ \cdots$ ㉠
$2ax-2b \ge bx+4a,\ (2a-b)x \ge 4a+2b\ \cdots$ ㉡
㉠, ㉡의 공통되는 부분이 $x \le -3$ 이 되기 위해서는 ㉡에서 $2a-b<0$ 이다.
이때, $x \le \frac{4a+2b}{2a-b}$ 이면서 $\frac{4a+2b}{2a-b} = -3$ 이어야 한다.
$4a+2b = -6a+3b,\ 10a = b$
$\therefore\ \frac{a}{b} = \frac{1}{10}$

10. $a-1<x<a+1$ 을 만족하는 모든 x 가 $-1<x<3$ 을 만족할 때, 상수 a 의 값의 범위는?

① $0<a<2$ ② $0\le a\le 2$ ③ $a<0,\ a>2$
④ $a\le 0,\ a\ge 2$ ⑤ 구할 수 없다.

해설

$a-1\ge -1$ 이고, $a+1\le 3$ 이어야 하므로
$a\ge 0,\ a\le 2$
$\therefore\ 0\le a\le 2$

11. 부등식 $[x-1]^2+3[x]-3<0$의 해는? (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.)

① $-2 \le x < 1$　② $-2 \le x < 0$　③ $-1 \le x < 1$
④ $-1 \le x < 0$　⑤ $0 \le x < 2$

해설

$x-1=A$라 하면 $x=A+1$
$\therefore [A]^2+3[A+1]-3=[A]^2+3[A]+3-3<0$
$[A]([A]+3)<0$　$\therefore -3<[A]<0$
$-2 \le A < 0$　$\therefore -2 \leqq x-1 < 0$이므로
$-1 \le x < 1$

12. 점 A(2, 2)에서 원 $x^2+y^2=1$에 그은 두 접선의 기울기를 α, β라 할 때, $\alpha\beta$의 값은?

① $\frac{8}{3}$ ② $-\frac{8}{3}$ ③ 1 ④ -1 ⑤ 0

해설

점 (2, 2)를 지나고 기울기 m인 접선을
$y-2=m(x-2)$ 즉, $mx-y-2m+2=0$
이라고 하면
원의 중심 (0, 0)에서 접선까지 거리는
원의 반지름 1과 같아야 한다.
따라서 $1=\frac{|-2m+2|}{\sqrt{m^2+1}}$,
$|-2m+2|=\sqrt{m^2+1}$
양변을 제곱하여 정리하면 $3m^2-8m+3=0$
따라서 두 기울기의 곱은 근과 계수와의 관계에 의하여 1이다.

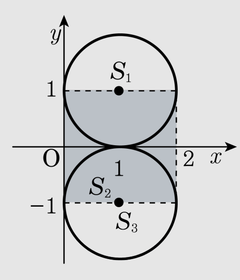
13. 평행이동 $f:(x,\ y) \to (x, y+b)$ $(-2 \le b \le 0)$ 에 의하여 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 이 옮겨지면서 만드는 자취의 넓이는?

① $\pi+2$　　② $\pi+4$　　③ $2\pi+2$

④ $2\pi+4$　　⑤ 2π

해설

평행이동 f 에 의하여 옮겨진 도형들은 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 을 y 축의 방향으로
0 부터 -2 까지 평행이동한 도형들이므로 옮겨진 도형이 만드는 자취는 다음 그림과 같다.



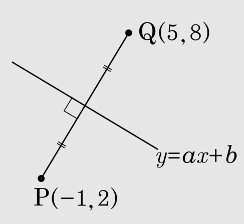
따라서 구하는 영역의 넓이 S 는
$S=S_1+S_2+S_3=\pi+4$

14. 두 점 P$(-1,\ 2)$, Q$(5,\ 8)$ 이 직선 $y = ax + b$ 에 대하여 대칭일 때, $a + b$ 의 값은?

① 10　　② 9　　③ 8　　④ 7　　⑤ 6

해설

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점이 $y = ax + b$ 위에 있으므로,



$\overline{\mathrm{PQ}}$ 의 중점 :

$\left(\frac{-1+5}{2},\ \frac{2+8}{2}\right) = (2,\ 5)$

$\therefore\ 5 = 2a + b$

$\overline{\mathrm{PQ}}$ 기울기 : $\frac{2-8}{-1-5} = 1$

$\therefore\ a = -1$

위 식에 대입하면 : $b = 7$

$\therefore\ a + b = -1 + 7 = 6$

15. 다음 중 무한집합인 것을 모두 고르면? (정답 2 개)

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$

② $B = \{x \mid x\text{는 } 1\text{보다 작은 분수}\}$

③ $C = \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수인 짝수}\}$

④ $D = \{x \mid x\text{는 } 2 \times n,\ n\text{은 } 10\text{보다 작은 자연수}\}$

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\}$

해설

① $A = \{5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25,\ \cdots,\ 100\}$이므로 유한집합이다.

② $B = \{x \mid x\text{는 } 1\text{보다 작은 분수}\} = \left\{\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \cdots\right\}$ 이므로 무한집합이다.

③ $C = \{x \mid x\text{는 } 3\text{의 배수인 짝수}\} = \{6,\ 12,\ \cdots\}$ 이므로 무한집합이다.

④ $D = \{x \mid x\text{는 } 2 \times n,\ n\text{은 } 10\text{보다 작은 자연수}\} = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ \cdots,\ 18\}$ 이므로 유한집합이다.

⑤ $E = \left\{x \,\middle|\, x\text{는 } \dfrac{100}{x}\text{을 자연수로 만드는 자연수}\right\} = \{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20,\ 25,\ 50,\ 100\}$ 이므로 유한집합이다.

16. 세 집합 $A = \{x \mid x\text{는 6 이하의 자연수}\}$, $B = \{2,\ 4,\ 5,\ 8\}$, $C = \{x \mid x\text{는 홀수}\}$ 일 때, $A \cap (B \cup C)$ 는?

① $\{2,\ 4\}$
② $\{2,\ 3,\ 4\}$
③ $\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
④ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$
⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8\}$

해설

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $B = \{2, 4, 5, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11 \cdots\}$
$A \cap (B \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, \cdots\} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

17. 전체집합 $U = \left\{3 \times x + 1 | x < 10,\ x\text{는 자연수}\right\}$ 의 부분집합 A, B 가 있다.
$A^c \cap B^c = \{28\}$, $(A \cup B) - (A \cap B) = \{4, 10, 19, 25\}$ 일 때, $n(A \cap B)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$U = \{3 \times x + 1 | x < 10$, x 는 자연수$\} = \{4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, 28\}$,
$A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{28\}$,
$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = \{4, 10, 19, 25\}$,
전체집합 U 는 $A - B$, $B - A$, $(A \cup B)^c$, $A \cap B$ 로 이루어지므로,
$A \cap B = \{7, 13, 16, 22\}$ 이다.
$\therefore n(A \cap B) = 4$

18. 전체집합 $U = \{x | x\text{는 } 41 \text{ 이하의 소수}\}$ 의 두 부분집합 $A,\ B$ 에 대하여 $n(A^c \cap B) = 4,\ n(B^c) = 7,\ n(A^c \cap B^c) = 4$ 일 때, $n(A - B)$ 의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

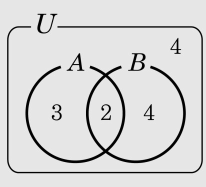
$n(U) = 13$ 이므로

$n(B) = n(U) - n(B^c) = 6$

$A^c \cap B = B - A$ 이므로

$n(B - A) = n(A^c \cap B) = 4$

$n((A \cup B)^c) = n(A^c \cap B^c) = 4$



벤 다이어그램에 각 부분의 원소의 개수를 적어보면 따라서

$n(A - B) = 13 - (6 + 4) = 3$ 이다.

19. 다음 중 명제와 그 역이 모두 참인 것은?

① $xy \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 또는 $y \geq 0$

② $x+y \geq 0$ 이면 $x \geq 0$ 이고 $y \geq 0$

③ $x \geq y$ 이면 $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$

④ $x \leq 2$ 이면 $|x-1| \leq |x-3|$

⑤ $a > 0$ 이고 $b > 0$ 이면 $a^2+b^2 > 0$

해설

① 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=-1$ 일 때,
$xy=2 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $-1<0$ 이다.
② 거짓 : (반례) $x=-2,\ y=3$ 일 때,
$x+y=-2+3 \geq 0$ 이지만 $-2<0$ 이고 $3>0$ 이다.
③ 거짓 : (반례) $x=2,\ y=-2$ 일 때,
$2 \geq -2$ 이지만 $\frac{1}{2} > -\frac{1}{2}$ 이다.
④ $|x-1| \leq |x-3|$ 의 양변을 제곱하면
$x^2-2x+1 \leq x^2-6x+9$ 에서 $x \leq 2$ 이므로 원래의 명제와 그 역이 모두 참이다.
⑤ 명제 '$a>0$ 이고 $b>0$ 이면 $a^2+b^2>0$' 은 참이지만, 그의 역 '$a^2+b^2>0$ 이면 $a>0$ 이고 $b>0$'은 거짓이다.

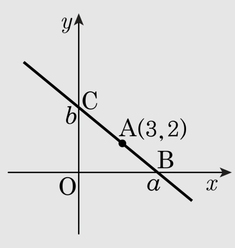
20. 좌표평면 위의 점 A(3, 2) 를 지나는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\ (a>0, b>0)$ 이 x 축, y 축과 만나는 점을 각각 B, C 라 할 때, $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은? (단, O는 원점이다.)

① 6 ② 8 ③ 10 ④ 12 ⑤ $2\sqrt{6}$

해설

$\triangle$OBC 의 넓이를 S 라 하면

$S=\frac{1}{2}ab$, A(3, 2) 는 직선 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ 위의 점이므로



$$1=\frac{3}{a}+\frac{2}{b}\geq 2\sqrt{\frac{3}{a}\times\frac{2}{b}}=2\sqrt{\frac{3}{S}}$$

양변을 제곱하면 $1\geq\frac{12}{S}$ $\therefore S\geq 12$

따라서 $\triangle$OBC 의 넓이의 최솟값은 12 이다.

21. $f\left(\dfrac{2x-1}{3}\right)=4-2x$ 일 때, $(f\circ f)(2)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$\dfrac{2x-1}{3}=t$ 로 놓으면

$2x-1=3t$ 이므로 $x=\dfrac{3t+1}{2}$

$f(t)=4-2\cdot\dfrac{3t+1}{2}=-3t+3$

$\therefore (f\circ f)(2)=f(f(2))=f(-3)=12$

22. 함수 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \ (x \geq 0)$ 의 역함수를 $g(x)$ 라 할때, $y = f(x)$ 와 $y = g(x)$ 의 그래프의 두 교점 사이의 거리를 구하면?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ 3 ④ $2\sqrt{3}$ ⑤ $3\sqrt{2}$

해설

$x \geq 0$ 에서 $y = f(x)$ 의 그래프와
직선 $y = x$ 의 교점의 x 좌표를 구하면
$\frac{1}{2}x^2 = x$ 에서 $x^2 - 2x = 0$, $x(x-2) = 0$
$\therefore x = 0$ 또는 $x = 2$
따라서 두 교점의 좌표가 $(0,\ 0)$, $(2,\ 2)$ 이므로
두 교점 사이의 거리는 $\sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$

23. x, y, z 는 양수일 때, 다음 식을 간단히 하면?

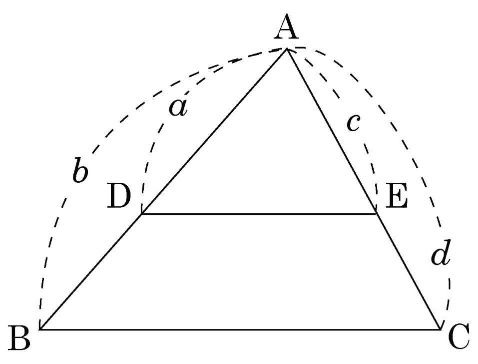
$$\frac{(x^{-1}+y^{-1}+z^{-1})\{(xy)^{-1}+(yz)^{-1}+(zx)^{-1}\}}{(x+y+z)(xy+yz+zx)}$$

① $x^{-2}y^{-2}z^{-2}$
② $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}$
③ $(x+y+z)^{-2}$
④ $\frac{1}{xyz}$
⑤ $\frac{1}{xy+yz+zx}$

해설

$$\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$
$$\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)$$
$$=\frac{1}{x+y+z}\left(\frac{xy+yz+zx}{xyz}\right)\left(\frac{1}{xy+yz+zx}\right)$$
$$\left(\frac{x+y+z}{xyz}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{xyz}\right)^2=x^{-2}y^{-2}z^{-2}$$

24. 다음 그림과 같이 $\overline{DE} // \overline{BC}$인 삼각형 ABC가 있다. $\overline{AD} = a$, $\overline{AB} = b$, $\overline{AE} = c$, $\overline{AC} = d$일 때, 다음 중 a, b, c, d사이의 관계로 옳지 <u>않은</u> 것을 모두 고르면? (단, $a \neq b$, $c \neq d$)



① $\frac{a}{c} = \frac{b-a}{d-c}$ ② $ac - bd = 0$

③ $a(d-c) = c(b-a)$ ④ $\frac{b-a}{a} = \frac{d-c}{c}$

⑤ $\frac{b-a}{a} = \frac{d}{c}$

해설

$a : b = c : d$이므로, $a : (b-a) = c : (d-a)$

25. 소비자 단체에서 백화점의 할인 판매 상품의 가격을 조사하였더니, 각 백화점들은 상품의 정가를 원가보다 높게 거짓으로 표시하여 할인 판매를 하고 있었다. 표시된 정가보다 20%를 할인하여 팔아도 12%의 이익을 남기도록 하고 있었다면, 정가는 원가보다 몇 %를 더 높여 표시되었는가? (여기서, 원가는 업자의 이윤까지 표함된 정상적인 판매 가격이다.)

① 24% ② 28% ③ 32% ④ 36% ⑤ 40%

해설

원가를 A원이라 하고, x%높게 정가를 정했다고 하자.

표시된 정가는 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)$원

할인 판매 가격은 $A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)$이다.

원가에 12%의 이익이 있게 파는 가격은

$A\left(1+\frac{12}{100}\right)$이므로

$$A\left(1+\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{20}{100}\right)=A\left(1+\frac{12}{100}\right)$$

$$\frac{100+x}{100}\cdot\frac{80}{100}A=\frac{112}{100}A$$

$$\frac{100+x}{100}=\frac{112}{100}\cdot\frac{100}{80}=\frac{7}{5}$$

$$\therefore x=\frac{7}{5}\times 100-100=40(\%)$$