1. $x+\dfrac{1}{x}=1$ 일 때, $x^{101}+\dfrac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1 ② -1 ③ -2 ④ 2 ⑤ 101

해설

$x+\dfrac{1}{x}=1$에서 $x^2+1=x$

$\therefore\ x^2-x+1=0,\ x^3=-1$

$$(\text{준 식})=(x^3)^{33}\cdot x^2+\frac{1}{(x^3)^{33}\cdot x^2}$$
$$=-x^2+\frac{-1}{x^2}=-\frac{x^4+1}{x^2}=-\frac{-x+1}{x^2}$$
$$=\frac{x-1}{x^2}=1$$

2. 다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어질 때, $f(1)$의 값을 구하면?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x)=(x-\alpha)Q(x)-2 & \cdots ㉠ \\ xf(x)=(x-\alpha)Q'(x)-2 & \cdots ㉡ \end{cases}$$

㉠ $\times\, x =$ ㉡에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x-\alpha)Q(x)-2x \\ &= (x-\alpha)Q(x)-2(x-\alpha)-2\alpha \\ &= (x-\alpha)\{Q(x)-2\}-2\alpha \end{aligned}$$

$\therefore\ -2\alpha=-2$

$\therefore\ \alpha=1$

$\therefore\ f(x)=(x-1)Q(x)-2$

$\therefore\ f(1)=-2$

해설

$f(x)+2$, $xf(x)+2$가 모두 일차식 $x-\alpha$로 나누어떨어지므로

$f(\alpha)+2=0 \therefore\ f(\alpha)=-2\cdots$①

$\alpha f(\alpha)+2=0\cdots$②

①, ②에서 $\alpha=1$

$\therefore\ f(1)=f(\alpha)=-2(\because$ ①$)$

3. x^2 의 계수가 1 인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2+5x-3$ 이고 최소공배수가 x^3+2x^2-5x-6 이다. $f(0)=3$, $g(0)=-6$ 일 때, $f(2)+g(-1)$ 의 값은?

① 9　　② 11　　③ 13　　④ 14　　⑤ 15

해설

$f(x)+g(x)=2x^2+5x-3$

$f(x)=Ga, g(x)=Gb$ (a, b는 서로소)

$G(a+b)=(2x-1)(x+3)$

최소공배수 $Gab=(x+3)(x-2)(x+1)$

$f(x)=(x+3)(x+1) \quad (\Leftarrow f(0)=3)$

$g(x)=(x+3)(x-2) \quad (\Leftarrow g(0)=-6)$

$\therefore f(2)+g(-1)=15+(-6)=9$

4. $z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005}+\bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ② -1 ③ $\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

④ 1 ⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$z=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$, $\bar{z}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2z+1=\sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$z^2+z+1=0$, $(z-1)(z^2+z+1)=0$

$\therefore z^3=1,\ \ \bar{z}^3=1$

$$\begin{aligned} z^{2005}+\bar{z}^{2005} &= (z^3)^{668}\cdot z+(\bar{z}^3)^{668}\cdot \bar{z} \\ &= z+\bar{z} \\ &= -1 \end{aligned}$$

5. 방정식 $x^2+x+2=0$의 한 허근을 ω라 할 때, $f(x)=ax^2+bx+12(a \neq 0)$에 대하여 $f(\omega)=3\omega$를 만족한다. 이 때, 실수 a, b의 합은?

① 12 ② −12 ③ 15 ④ −15 ⑤ 18

해설

$x^2+x+2=0$의 한 허근이 ω이므로

$\omega^2+\omega+2=0 \quad \therefore \ \omega^2=-\omega-2$

$f(\omega)=a\omega^2+b\omega+12=a(-\omega-2)+b\omega+12$

$\qquad =(b-a)\omega+(12-2a)$

$f(\omega)=3\omega$이므로

$(b-a)\omega+(12-2a)=3\omega$

$b-a=3,\ 12-2a=0$ ($\because$ ω는 허수)

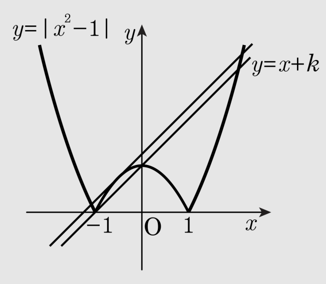
$\therefore \ a=6,\ b=9$

6. x에 관한 방정식 $|x^2-1|-x-k=0$이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k의 값의 범위를 구하면?

① $1<k<\frac{5}{4}$　② $1\le k\le\frac{5}{4}$　③ $-5<k<-\frac{5}{4}$

④ $k<1,\ k>\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{4}{5}<k<1$

해설



$|x^2-1|-x-k=0$을 변형하여 분리하면

$|x^2-1|=x+k$, $y=|x^2-1|$, $y=x+k$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지려면

다음그림과 같아야 한다.

$y=-x^2+1$, $y=x+k$가

두 점에서 만나야하므로

$x^2+x+k-1=0$의 판별식 $D>0$이어야 한다.

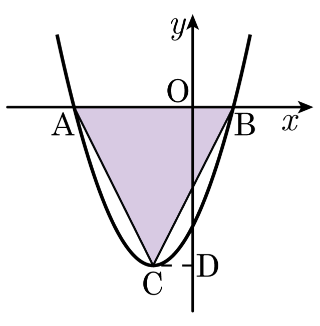
$D=1-4k+4>0$　$\therefore\ k<\frac{5}{4}$

또, 직선 $y=x+k$는 점 $(-1,0)$을 지나는 직선 위에 존재해야 하므로

$0<-1+k$　$\therefore\ k>1$

$\therefore\ 1<k<\frac{5}{4}$

7. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x축과 만나는 점을 A ,꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle$ABC 의 넓이는?



① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$y = x^2 + 2x - 3 = (x+1)^2 - 4$

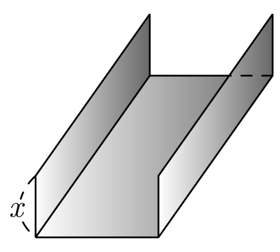
C$(-1, -4)$

$y = 0$ 일 때 $x^2 + 2x - 3 = (x+3)(x-1) = 0$ 이므로

A$(-3, 0)$, B$(1, 0)$

$\therefore \triangle \mathrm{ABC} = \dfrac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$

8. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x 의 값은?



① 4 cm ② 5 cm ③ 6 cm ④ 7 cm ⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면
가로의 길이는 $(20-2x)$ cm
단면의 넓이를 S m^2 라 하면
$S = x(20-2x) = -2x^2 + 20x$
$= -2(x-5)^2 + 50 \ (0 < x < 10)$
따라서 $x = 5(\mathrm{cm})$ 일 때,
S 는 최댓값 $50\,\mathrm{m}^2$ 를 갖는다.

9. $A : 0.4-0.25x \le 1.5x-1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. A에서 B를 제외한 수는?

① $x<1$ ② $x \ge 1$ ③ $x < \frac{19}{16}$
④ $x \le \frac{19}{16}$ ⑤ $x \ge \frac{19}{16}$

해설

$0.4-0.25x \le 1.5x-1.35$ 의 양변에 100을 곱하면
$40-25x \le 150x-135$
$175 \le 175x$
$1 \le x$
$A : 1 \le x$
$-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 의 양변에 12 를 곱하면
$-3(1-2x) < 6(2-x)-4(x-1)$
$-3+6x < 12-6x-4x+4$
$x < \frac{19}{16}$
$B : x < \frac{19}{16}$ 이므로
A에서 B를 제외한 수는 $x \ge \frac{19}{16}$ 이다.

10. 실수 x에 대하여 $[x]$는 x를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 한다. 이차부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$의 해를 바르게 구한 것은?

① $-1 \le x < 2$ ② $x \le -1$ ③ $x \ge 1$
④ $x \le 1$ ⑤ $x \le -1,\ x \ge 2$

해설

$2[x]^2 - [x] - 6 < 0$에서
$([x] - 2)(2[x] + 3) < 0$
$\therefore -\dfrac{3}{2} < [x] < 2$
$-1 \le [x] < 2 \quad \therefore -1 \le x < 2$

11. 두 부등식 $x < -1,\ x > 2$, $2x^2+(5+2a)x+5a<0$을 동시에 만족하는 정수 x의 값이 $x=-2$뿐일 때, 실수 a의 최솟값은? (단, $a<\frac{5}{2}$)

① -3　② -2　③ 1　④ 2　⑤ -5

해설

$2x^2+(5+2a)x+5a=(2x+5)(x+a)<0$

$-\frac{5}{2}<x<-a\left(\because\ a<\frac{5}{2}\right)$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x=-2$뿐이므로 $-2<-a\le 3$

$\therefore\ -3\le a<2$

따라서, 구하는 a의 최솟값은 -3

12. 두 원 $x^2+y^2=11$, $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$ ② $\sqrt{11}$ ③ 5 ④ $2\sqrt{7}$ ⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2+y^2=11$과 $(x-5)^2+y^2=16$의 공통현의 방정식은

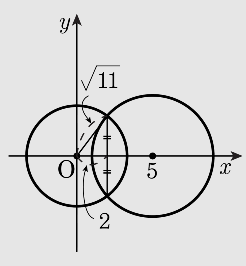
$\left(x^2+y^2-11\right)-\left(x^2-10x+y^2+9\right)=0$

$10x-20=0 \quad \therefore x=2$

원 $x^2+y^2=11$의 중심 $(0,0)$과 공통현 $x=2$사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$이므로 공통현의 길이는

$2\times\sqrt{\left(\sqrt{11}\right)^2-2^2}=2\sqrt{7}$



13. 원 $x^2+y^2+4x+2y+4=0$ 위를 움직이는 점 P 에서 직선 $3x+4y=10$ 까지의 거리를 $d(p)$ 라 할 때 $d(p)$ 의 최소값은 ?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$x^2+y^2+4x+2y+4=0 \Leftarrow (x+2)^2+(y+1)^2=1$

$d(p)$ 의 최소값은 원의 중심 $(-2,-1)$ 에서

직선 $3x+4y=10$ 까지 거리에서 반지름을 뺀 값이므로

$$\frac{|3\times(-2)+4(-1)-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}-1=\frac{20}{5}-1=3$$

14. 좌표평면 위의 두 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(4,\ 2)$와 x축 위의 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 길이의 최솟값은?

① 3　　② $3\sqrt{2}$　　③ $2\sqrt{3}$　　④ $4\sqrt{2}$　　⑤ 4

해설

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$의 최솟값은 점 $\mathrm{A}(1,\ 1)$을 직선 x축에 대하여 대칭이동하여 옮겨진 점 $\mathrm{A}'(1,\ -1)$ 와 점 $\mathrm{B}(4,\ 2)$ 사이의 직선거리인 $\overline{\mathrm{A'B}}$이므로 $\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2}=3\sqrt{2}$

15. 집합 $A = \{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 $a,\ b$ 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b,\ a \in A,\ b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

b \ a	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1,\ 2,\ 3,\ 6,\ 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

16. 다음은 집합 $A = \{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?

① 5, 31 ② 6, 63 ③ 7, 127

④ 8, 255 ⑤ 9, 511

해설

$A = \{x \mid x$는 20 미만의 소수$\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$이므로 원소의 개수는 8 개이다.
(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) − 1
이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$이고
진부분집합의 개수는 $256 - 1 = 255$ (개)이다.

17. 집합 $A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{1,\ 3,\ 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

㉠ $B \not\subset C$	㉡ $C \subset A$	㉢ $1 \in C,\ 3 \in C$

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $1 \in C,\ 3 \in C,\ 5 \notin C$ 이다.
따라서, 집합 C 는 1 과 3 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 A 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid x$는 10 이하의 짝수$\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X의 개수를 구하여라.

㉠ $X \subset A$	㉡ $2 \in X$	㉢ $n(X) \leq 3$

▶ 답 : ＿＿＿＿ 개

▷ 정답 : 11 개

해설

$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

집합 X는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3 개 이하인 A의 부분집합이므로

$\{2\}$, $\{2, 4\}$, $\{2, 6\}$, $\{2, 8\}$, $\{2, 10\}$, $\{2, 4, 6\}$, $\{2, 4, 8\}$, $\{2, 4, 10\}$, $\{2, 6, 8\}$, $\{2, 6, 10\}$, $\{2, 8, 10\}$의 11 개이다.

19. 네 개의 조건 p, q, r, s에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$　　② $p \Rightarrow \sim r$　　③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$　　⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$q \to \sim s, \sim r \to p$

$s \to \sim q, \sim p \to r$

$\therefore \sim q \to \sim p \Rightarrow p \to q$

20. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은?(a, b, c 는 모두 양수)

① $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\dfrac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \dfrac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$

$= \dfrac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$

$= a + b + 2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$

$\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$(단 $a = b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$

$= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$

$= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$

$\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a = b$)

④ (반례) $a = 1$

$1^2 - 1 > 1, 0 > 1$

$\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로

$a + b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a = b$)

$b + c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b = c$)

$c + a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c = a$)

$\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$

(등호 성립조건은 $a = b = c$)

21. 집합 $X = \{-1,\ 1, -i,\ i\}$ 에 대하여 $f\ :\ X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제곱하여 모두 합하면?

① -1　　② -2　　③ 0　　④ 1　　⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1,\ 1,\ i,\ -i\}$ 이다.
모든 원소를 제곱하여 더하면
$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$

22. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1　　② 0　　③ $\frac{1}{3}$　　④ 3　　⑤ 6

해설

$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 이므로 $(g \circ f)(3x) = x$

$3x = t$ 로 치환하면 $x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x+2) = \frac{1}{3}x$

$3x + 2 = 2$ 일 때 $x = 0$

$\therefore\ g(2) = 0$

23. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 $f,\ g$ 가 $f(x) = x^2 + x,\ f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은 ?

① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$f^{-1}(2) = c$ 라 하면 $f(c) = 2 \to c^2 + c = 2$

$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c-1)(c+2) = 0$

$c > 0$ 이므로 $c = 1$

$\therefore\ f^{-1}(2) = 1$

$f(x)g(x) = x + 2$ 에 $x = 1$ 을 대입하면

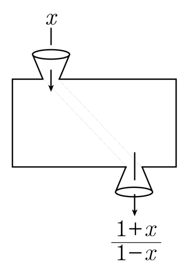
$f(1)g(1) = 3$

$(1^2 + 1)g(1) = 3$

$\therefore\ g(1) = \frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \therefore\ (g \circ f^{-1})(2) &= g\left\{f^{-1}(2)\right\} \\ &= g(1) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

24. 다음 그림과 같이 x를 넣으면 $\dfrac{1+x}{1-x}$가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2, x_2를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1}이라 한다. $x_1 = -\dfrac{1}{2}$일 때, x_{2000}을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$x_1 = -\dfrac{1}{2}$이면

$$x_2 = \frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 2,$$

$$x_4 = \frac{1+2}{1-2} = -3,$$

$$x_5 = \frac{1+(-3)}{1-(-3)} = -\frac{1}{2},\ x_6 = \frac{1}{3}, \cdots$$

그러므로 $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ 일 때

$x_{4k+1} = -\dfrac{1}{2},\ x_{4k+2} = \dfrac{1}{3},\ x_{4k+3} = 2,\ x_{4k+4} = -3$

따라서, $2000 = 4 \times 499 + 4$이므로

$x_{2000} = x_4 = -3$

25. $0 < a < 1$이고 $x = a + \frac{1}{a}$일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$를 a로 나타내면?

① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$\sqrt{x^2 - 4} + x = \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a}$

$= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a}$

$= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$

$\left(\because 0 < a < 1\text{일 때, } a < \frac{1}{a}\right)$