

1. $x + \frac{1}{x} = 1$ 일 때, $x^{101} + \frac{1}{x^{101}}$ 의 값은?

① 1

② -1

③ -2

④ 2

⑤ 101

해설

$$x + \frac{1}{x} = 1 \text{ 에서 } x^2 + 1 = x$$

$$\therefore x^2 - x + 1 = 0, x^3 = -1$$

$$(\text{준 식}) = (x^3)^{33} \cdot x^2 + \frac{1}{(x^3)^{33} \cdot x^2}$$

$$= -x^2 + \frac{-1}{x^2} = -\frac{x^4 + 1}{x^2} = -\frac{-x + 1}{x^2}$$

$$= \frac{x - 1}{x^2} = 1$$

2. 다항식 $f(x)$ 에 대하여 $f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어질 때, $f(1)$ 의 값을 구하면?

① -2

② -1

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

$$\begin{cases} f(x) = (x - \alpha)Q(x) - 2 \cdots \textcircled{㉠} \\ xf(x) = (x - \alpha)Q'(x) - 2 \cdots \textcircled{㉡} \end{cases}$$

$\textcircled{㉠} \times x = \textcircled{㉡}$ 에서

$$\begin{aligned} xf(x) &= (x - \alpha)Q(x) - 2x \\ &= (x - \alpha)Q(x) - 2(x - \alpha) - 2\alpha \\ &= (x - \alpha)\{Q(x) - 2\} - 2\alpha \end{aligned}$$

$$\therefore -2\alpha = -2$$

$$\therefore \alpha = 1$$

$$\therefore f(x) = (x - 1)Q(x) - 2$$

$$\therefore f(1) = -2$$

해설

$f(x) + 2$, $xf(x) + 2$ 가 모두 일차식 $x - \alpha$ 로 나누어떨어지므로
 $f(\alpha) + 2 = 0 \therefore f(\alpha) = -2 \cdots \textcircled{㉠}$

$$\alpha f(\alpha) + 2 = 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

①, ②에서 $\alpha = 1$

$$\therefore f(1) = f(\alpha) = -2 (\because \textcircled{㉠})$$

3. x^2 의 계수가 1인 두 이차 다항식 $f(x)$, $g(x)$ 의 합이 $2x^2 + 5x - 3$ 이고
최소공배수가 $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ 이다. $f(0) = 3$, $g(0) = -6$ 일 때,
 $f(2) + g(-1)$ 의 값은?

① 9

② 11

③ 13

④ 14

⑤ 15

해설

$$f(x) + g(x) = 2x^2 + 5x - 3$$

$$f(x) = Ga, g(x) = Gb \quad (a, b \text{는 서로소})$$

$$G(a+b) = (2x-1)(x+3)$$

$$\text{최소공배수 } Gab = (x+3)(x-2)(x+1)$$

$$f(x) = (x+3)(x+1) \quad (\Leftarrow f(0) = 3)$$

$$g(x) = (x+3)(x-2) \quad (\Leftarrow g(0) = -6)$$

$$\therefore f(2) + g(-1) = 15 + (-6) = 9$$

4. $z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$ 에 대하여 $z^{2005} + \bar{z}^{2005}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$

② -1

③ $\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

④ 1

⑤ $\sqrt{3}i$

해설

$$z = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \bar{z} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

$2z + 1 = \sqrt{3}i$ 에서 양변을 제곱해서 정리하면

$$z^2 + z + 1 = 0, (z - 1)(z^2 + z + 1) = 0$$

$$\therefore z^3 = 1, \bar{z}^3 = 1$$

$$z^{2005} + \bar{z}^{2005} = (z^3)^{668} \cdot z + (\bar{z}^3)^{668} \cdot \bar{z}$$

$$= z + \bar{z}$$

$$= -1$$

5. 방정식 $x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근을 ω 라 할 때, $f(x) = ax^2 + bx + 12$ ($a \neq 0$)에 대하여 $f(\omega) = 3\omega$ 를 만족한다. 이 때, 실수 a, b 의 합은?

① 12

② -12

③ 15

④ -15

⑤ 18

해설

$x^2 + x + 2 = 0$ 의 한 허근이 ω 이므로

$$\omega^2 + \omega + 2 = 0 \quad \therefore \omega^2 = -\omega - 2$$

$$\begin{aligned} f(\omega) &= a\omega^2 + b\omega + 12 = a(-\omega - 2) + b\omega + 12 \\ &= (b - a)\omega + (12 - 2a) \end{aligned}$$

$f(\omega) = 3\omega$ 이므로

$$(b - a)\omega + (12 - 2a) = 3\omega$$

$$b - a = 3, \quad 12 - 2a = 0 \quad (\because \omega \text{는 허수})$$

$$\therefore a = 6, \quad b = 9$$

6. x 에 관한 방정식 $|x^2 - 1| - x - k = 0$ 이 서로 다른 네 개의 실근을 가질 때, k 의 값의 범위를 구하면?

① $1 < k < \frac{5}{4}$

② $1 \leq k \leq \frac{5}{4}$

③ $-5 < k < -\frac{5}{4}$

④ $k < 1, k > \frac{5}{4}$

⑤ $\frac{4}{5} < k < 1$

해설

$|x^2 - 1| - x - k = 0$ 을 변형하여
분리하면

$$|x^2 - 1| = x + k, y = |x^2 - 1|, y = x + k$$

이 두 함수가 4개의 교점을 가지
려면

다음그림과 같아야 한다.

$$y = -x^2 + 1, y = x + k \text{가}$$

두 점에서 만나야하므로

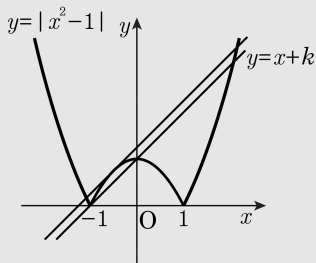
$x^2 + x + k - 1 = 0$ 의 판별식 $D > 0$ 이어야 한다.

$$D = 1 - 4k + 4 > 0 \quad \therefore k < \frac{5}{4}$$

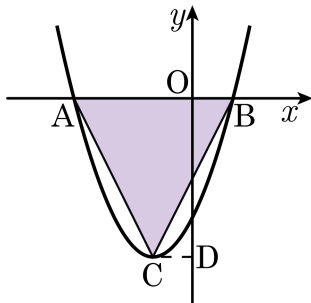
또, 직선 $y = x + k$ 는 점 $(-1, 0)$ 을 지나는 직선 위에 존재해야
하므로

$$0 < -1 + k \quad \therefore k > 1$$

$$\therefore 1 < k < \frac{5}{4}$$



7. 다음 그림과 같이 $y = x^2 + 2x - 3$ 의 그래프가 x 축과 만나는 점을 A, 꼭짓점을 C 라 할 때, $\triangle ABC$ 의 넓이는?



① 6

② 7

③ 8

④ 9

⑤ 10

해설

$$y = x^2 + 2x - 3 = (x + 1)^2 - 4$$

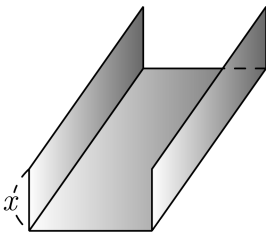
$$C(-1, -4)$$

$$y = 0 \text{ 일 때 } x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) = 0 \text{ 이므로}$$

$$A(-3, 0), B(1, 0)$$

$$\therefore \triangle ABC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$

8. 다음 그림과 같이 폭이 20 cm 인 양철판을 구부려서 단면이 직사각형인 물받이를 만들려고 한다. 단면의 넓이가 최대일 때, x 의 값은?



① 4 cm

② 5 cm

③ 6 cm

④ 7 cm

⑤ 8 cm

해설

단면의 세로의 길이를 x cm 라 하면

가로의 길이는 $(20 - 2x)$ cm

단면의 넓이를 S m² 라 하면

$$S = x(20 - 2x) = -2x^2 + 20x$$

$$= -2(x - 5)^2 + 50 \quad (0 < x < 10)$$

따라서 $x = 5$ (cm) 일 때,

S 는 최댓값 50 m² 를 갖는다.

9. $A : 0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$, $B : -\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 가 있다. A 에서 B 를 제외한 수는?

- ① $x < 1$ ② $x \geq 1$ ③ $x < \frac{19}{16}$
④ $x \leq \frac{19}{16}$ ⑤ $x \geq \frac{19}{16}$

해설

$0.4 - 0.25x \leq 1.5x - 1.35$ 의 양변에 100을 곱하면

$$40 - 25x \leq 150x - 135$$

$$175 \leq 175x$$

$$1 \leq x$$

$$A : 1 \leq x$$

$-\frac{1-2x}{4} < \frac{2-x}{2} - \frac{x-1}{3}$ 의 양변에 12를 곱하면

$$-3(1-2x) < 6(2-x) - 4(x-1)$$

$$-3 + 6x < 12 - 6x - 4x + 4$$

$$x < \frac{19}{16}$$

$$B : x < \frac{19}{16} \text{ 이므로}$$

A 에서 B 를 제외한 수는 $x \geq \frac{19}{16}$ 이다.

10. 실수 x 에 대하여 $[x]$ 는 x 를 넘지 않는 최대 정수를 나타낸다고 한다.
이차부등식 $2[x]^2 - [x] - 6 < 0$ 의 해를 바르게 구한 것은?

① $-1 \leq x < 2$

② $x \leq -1$

③ $x \geq 1$

④ $x \leq 1$

⑤ $x \leq -1, x \geq 2$

해설

$$2[x]^2 - [x] - 6 < 0 \text{에서}$$

$$([x] - 2)(2[x] + 3) < 0$$

$$\therefore -\frac{3}{2} < [x] < 2$$

$$-1 \leq [x] < 2 \quad \therefore -1 \leq x < 2$$

11. 두 부등식 $x < -1$, $x > 2$, $2x^2 + (5 + 2a)x + 5a < 0$ 을 동시에 만족하는 정수 x 의 값이 $x = -2$ 뿐일 때, 실수 a 의 최솟값은? (단, $a < \frac{5}{2}$)

- ① -3 ② -2 ③ 1 ④ 2 ⑤ -5

해설

$$2x^2 + (5 + 2a)x + 5a = (2x + 5)(x + a) < 0$$

$$-\frac{5}{2} < x < -a \quad \left(\because a < \frac{5}{2} \right)$$

두 부등식을 만족하는 정수가 $x = -2$ 뿐이므로 $-2 < -a \leq 3$

$$\therefore -3 \leq a < 2$$

따라서, 구하는 a 의 최솟값은 -3

12. 두 원 $x^2 + y^2 = 11$, $(x - 5)^2 + y^2 = 16$ 의 공통현의 길이는?

① $\sqrt{2}$

② $\sqrt{11}$

③ 5

④ $2\sqrt{7}$

⑤ $4\sqrt{2}$

해설

두 원 $x^2 + y^2 = 11$ 과 $(x - 5)^2 + y^2 = 16$
의 공통현의 방정식은

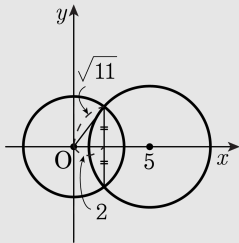
$$(x^2 + y^2 - 11) - (x^2 - 10x + y^2 + 9) = 0$$

$$10x - 20 = 0 \quad \therefore x = 2$$

원 $x^2 + y^2 = 11$ 의 중심 $(0, 0)$ 과 공통현
 $x = 2$ 사이의 거리가 2이고,

반지름의 길이가 $\sqrt{11}$ 이므로 공통현의 길이는

$$2 \times \sqrt{(\sqrt{11})^2 - 2^2} = 2\sqrt{7}$$



13. 원 $x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0$ 위를 움직이는 점 P 에서 직선 $3x + 4y = 10$ 까지의 거리를 $d(p)$ 라 할 때 $d(p)$ 의 최소값은 ?

① 2

② 3

③ 4

④ 5

⑤ 6

해설

$$x^2 + y^2 + 4x + 2y + 4 = 0 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

$d(p)$ 의 최소값은 원의 중심 $(-2, -1)$ 에서

직선 $3x + 4y = 10$ 까지 거리에서 반지름을 뺀 값이므로

$$\frac{|3 \times (-2) + 4(-1) - 10|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} - 1 = \frac{20}{5} - 1 = 3$$

14. 좌표평면 위의 두 점 $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ 와 x 축 위의 점 P 에 대하여 $\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 길이의 최솟값은?

① 3

② $3\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{3}$

④ $4\sqrt{2}$

⑤ 4

해설

$\overline{AP} + \overline{BP}$ 의 최솟값은 점 $A(1, 1)$ 을 직선 x 축에 대하여 대칭이동하여 옮겨진 점 $A'(1, -1)$ 와 점 $B(4, 2)$ 사이의 직선거리인 $\overline{A'B}$ 이므로 $\sqrt{(4-1)^2 + (2+1)^2} = 3\sqrt{2}$

15. 집합 $A = \{0, 1, 2, 3\}$ 이고 집합 A 에 속하는 임의의 원소 a, b 에 대하여 $a * b = a \times b$ (a 는 홀수이고 $b \neq 0$) 로 정의할 때, 집합 $B = \{x \mid x = a * b, a \in A, b \in A\}$ 의 부분집합의 개수를 구하면?

① 2 개

② 4 개

③ 8 개

④ 16 개

⑤ 32 개

해설

$b \backslash a$	1	3
1	1	3
2	2	6
3	3	9

표에 의하여 $B = \{1, 2, 3, 6, 9\}$ 이므로 집합 B 의 부분집합의 개수는 $2^5 = 32$ (개) 이다.

16. 다음은 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 에 대하여 원소의 개수와 진부분집합의 개수를 바르게 구한 것은?

① 5, 31

② 6, 63

③ 7, 127

④ 8, 255

⑤ 9, 511

해설

$A = \{x \mid x \text{는 } 20 \text{ 미만의 소수}\}$ 를 원소나열법으로 고치면 $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$ 이므로 원소의 개수는 8 개이다.

(진부분집합의 개수) = (부분집합의 개수) - 1

이므로 부분집합의 개수는 $2^8 = 256$ 이고

진부분집합의 개수는 $256 - 1 = 255$ (개) 이다.

17. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 C 의 개수를 구하여라.

$$\textcircled{\text{㉠}} B \not\subset C$$

$$\textcircled{\text{㉡}} C \subset A$$

$$\textcircled{\text{㉢}} 1 \in C, 3 \in C$$

▶ 답 : 개

▷ 정답 : 4 개

해설

㉠과 ㉢에 의하여 $1 \in C, 3 \in C, 5 \notin C$ 이다.

따라서, 집합 C 는 1 과 3 을 포함하고 5 를 포함하지 않는 A 의 부분집합이므로 $2^{5-2-1} = 2^2 = 4$ (개) 이다.

18. 집합 $A = \{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 이하의 짝수}\}$ 에 대하여 다음을 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

$$\textcircled{\neg} X \subset A$$

$$\textcircled{\text{L}} 2 \in X$$

$$\textcircled{\text{E}} n(X) \leq 3$$



답 :

개



정답 : 11 개

해설

$$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$$

집합 X 는 2를 원소로 갖고 원소의 개수가 3개 이하인 A 의 부분 집합이므로

$\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \{2, 4, 6\}, \{2, 4, 8\}, \{2, 4, 10\}, \{2, 6, 8\}, \{2, 6, 10\}, \{2, 8, 10\}$ 의 11 개이다.

19. 네 개의 조건 p, q, r, s 에 대하여 $q \Rightarrow \sim s$, $\sim r \Rightarrow p$ 라 한다. 이로부터 $s \Rightarrow r$ 라는 결론을 얻기 위해 다음 중 필요한 것은?

① $p \Rightarrow q$

② $p \Rightarrow \sim r$

③ $r \Rightarrow q$

④ $r \Rightarrow s$

⑤ $\sim s \Rightarrow q$

해설

$$q \rightarrow \sim s, \sim r \rightarrow p$$

$$s \rightarrow \sim q, \sim p \rightarrow r$$

$$\therefore \sim q \rightarrow \sim p \Rightarrow p \rightarrow q$$

20. 다음 중 항상 성립하는 부등식이 아닌 것은? (a, b, c 는 모두 양수)

① $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

② $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$

③ $a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$

④ $a^2 - 1 > a$

⑤ $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$

해설

$a > 0, b > 0, c > 0$

① $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$
 $= \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

$\therefore \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)

② $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - (\sqrt{a+b})^2$
 $= a+b+2\sqrt{ab} - (a+b) = 2\sqrt{ab} \geq 0$
 $\therefore \sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ (단 $a=b$ 일때 등호성립)

③ $a^3 + b^3 - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - ab + b^2) - ab(a+b)$
 $= (a+b)(a^2 - 2ab + b^2)$
 $= (a+b)(a-b)^2 \geq 0$
 $\therefore a^3 + b^3 \geq ab(a+b)$ (등호 성립조건은 $a=b$)

④ (반례) $a=1$
 $1^2 - 1 > 1, 0 > 1$
 $\therefore$ 거짓

⑤ a, b, c 가 모두 양수이므로
 $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ (등호 성립조건은 $a=b$)
 $b+c \geq 2\sqrt{bc}$ (등호 성립조건은 $b=c$)
 $c+a \geq 2\sqrt{ca}$ (등호 성립조건은 $c=a$)
 $\therefore (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$
 (등호 성립조건은 $a=b=c$)

21. 집합 $X = \{-1, 1, -i, i\}$ 에 대하여 $f : X \rightarrow Y$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여 모든 원소를 각각 제공하여 모두 합하면?

① -1

② -2

③ 0

④ 1

⑤ 2

해설

치역 $Y = \{-1, 1, i, -i\}$ 이다.

모든 원소를 제공하여 더하면

$$(-1)^2 + 1^2 + (-i)^2 + i^2 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

22. $f(x) = 3x + 2$ 에서 $g(x)$ 가 $(g \circ f)^{-1}(x) = 3x$ 를 만족시킨다고 할 때, $g(2)$ 의 값은?

① 1

② 0

③ $\frac{1}{3}$

④ 3

⑤ 6

해설

$$(g \circ f)^{-1}(x) = 3x \text{ 이므로 } (g \circ f)(3x) = x$$

$$3x = t \text{ 로 치환하면 } x = \frac{1}{3}t \Rightarrow (g \circ f)(t) = \frac{1}{3}t$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}x$$

$$3x + 2 = 2 \text{ 일 때 } x = 0$$

$$\therefore g(2) = 0$$

23. 양의 실수의 집합을 R^* 라 할 때 R^* 에서 R^* 로의 함수 f, g 가 $f(x) = x^2 + x$, $f(x)g(x) = x + 2$ 를 만족할 때 $(g \circ f^{-1})(2)$ 의 값은 ?

- ① 2 ② 1 ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{3}{2}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

해설

$$f^{-1}(2) = c \text{ 라 하면 } f(c) = 2 \rightarrow c^2 + c = 2$$

$$c^2 + c - 2 = 0 \Leftrightarrow (c - 1)(c + 2) = 0$$

$$c > 0 \text{ 이므로 } c = 1$$

$$\therefore f^{-1}(2) = 1$$

$$f(x)g(x) = x + 2 \text{ 에 } x = 1 \text{ 을 대입하면}$$

$$f(1)g(1) = 3$$

$$(1^2 + 1)g(1) = 3$$

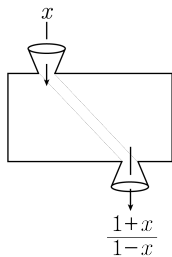
$$\therefore g(1) = \frac{3}{2}$$

$$\therefore (g \circ f^{-1})(2) = g\{f^{-1}(2)\}$$

$$= g(1) = \frac{3}{2}$$

24.

다음 그림과 같이 x 를 넣으면 $\frac{1+x}{1-x}$ 가 나오는 상자가 있다. 이 상자에 x_1 을 넣었을 때, 나오는 것을 x_2 , x_2 를 다시 넣었을 때 나오는 것을 x_3 라 한다. 이와 같이 계속하여 x_n 을 넣었을 때 나오는 것을 x_{n+1} 이라 한다. $x_1 = -\frac{1}{2}$ 일 때, x_{2000} 을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : -3

해설

$$x_1 = -\frac{1}{2} \text{이면}$$

$$x_2 = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{3}$$

$$x_3 = \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 2,$$

$$x_4 = \frac{1 + 2}{1 - 2} = -3,$$

$$x_5 = \frac{1 + (-3)}{1 - (-3)} = -\frac{1}{2}, x_6 = \frac{1}{3}, \dots$$

그러므로 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ 일 때

$$x_{4k+1} = -\frac{1}{2}, x_{4k+2} = \frac{1}{3}, x_{4k+3} = 2, x_{4k+4} = -3$$

따라서, $2000 = 4 \times 499 + 4$ 이므로

$$x_{2000} = x_4 = -3$$

25. $0 < a < 1$ 이고 $x = a + \frac{1}{a}$ 일 때, $\sqrt{x^2 - 4} + x$ 를 a 로 나타내면?

- ① $2a$ ② $\frac{2}{a}$ ③ $-\frac{2}{a}$ ④ $-2a$ ⑤ 0

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 - 4} + x &= \sqrt{\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 4} + a + \frac{1}{a} \\&= \sqrt{\left(a - \frac{1}{a}\right)^2} + a + \frac{1}{a} \\&= -\left(a - \frac{1}{a}\right) + a + \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \\&\left(\because 0 < a < 1 \text{ 일 때, } a < \frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$