

1. $x-1$ 로 나누면 나머지가 3, $x-2$ 로 나누면 나머지가 7, $x-3$ 으로 나누면 나머지가 13이 되는 가장 낮은 차수의 다항식을 $f(x)$ 라 할 때, $f(-3)$ 의 값은?

- ① 7 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

해설

$$f(x) = k(x-1)(x-2)(x-3) + ax^2 + bx + c$$

$$f(1) = a + b + c = 3 \quad \dots\dots ①$$

$$f(2) = 4a + 2b + c = 7 \quad \dots\dots ②$$

$$f(3) = 9a + 3b + c = 13 \quad \dots\dots ③$$

①, ②, ③을 연립하여 풀면

$$a = 1, b = 1, c = 1$$

$f(x)$ 가 가장 낮은 차수가 되려면 $k = 0$

$$\therefore f(x) = x^2 + x + 1,$$

$$f(-3) = (-3)^2 + (-3) + 1 = 7$$

2. 1999개의 다항식 $x^2 - 2x - 1, x^2 - 2x - 2, \dots, x^2 - 2x - 1999$ 중에서 계수가 정수인 일차식의 곱으로 인수분해 되는 것은 모두 몇 개인가?

- ① 43개 ② 44개 ③ 45개 ④ 46개 ⑤ 47개

해설

$x^2 - 2x - n = (x+a)(x-b)$ (a, b 는 자연수)라 하면 ($1 \leq n \leq 1999$ 인 자연수)

$$ab = n, a = b - 2$$

$\therefore n = 1 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, \dots, 43 \cdot 45 (= 1935)$ 의 43개

3. $x^4 - 6x^2 + 1$ 을 인수분해 하였더니 $(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$ 가 되었다. 이 때, $a + b + c + d$ 의 값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 4

해설

$$\begin{aligned}x^4 - 6x^2 + 1 &= (x^4 - 2x^2 + 1) - 4x^2 \\ &= (x^2 - 1)^2 - (2x)^2 \\ &= (x^2 + 2x - 1)(x^2 - 2x - 1) \\ &= (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) \\ \therefore a + b + c + d &= -2\end{aligned}$$

4. 다음 중 $(2+3i)z+(2-3i)\bar{z}=2$ 를 만족하는 복소수 z 의 개수는? (단, \bar{z} 는 z 의 켈레복소수)

- ① 없다. ② 1 개 ③ 2 개
④ 3 개 ⑤ 무수히 많다.

해설

$z = a + bi$ 로 놓으면 $\bar{z} = a - bi$ (단, a, b 는 실수)이므로 주어진 식에 대입하면
 $(2+3i)(a+bi) + (2-3i)(a-bi) = 2$
 $(2a-3b) + (3a+2b)i + (2a-3b) - (3a+2b)i = 2$
 $2(2a-3b) = 2$
 $\therefore 2a-3b = 1$
따라서 $2a-3b=1$ 을 만족하는 a, b 는 무수히 많고, $z = a + bi$ 이므로 문제의 조건을 만족하는 z 가 무수히 많음을 알 수 있다.

5. $x^2 - xy - 6y^2 + x + 7y + k$ 가 x, y 에 대한 두 일차식의 곱으로 인수분해 되도록 상수 k 의 값을 정하면?

① -2 ② -4 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

x 에 관해 식을 정리하면

$$f(x) = x^2 + (1 - y)x + (-6y^2 + 7y + k)$$

$f(x)$ 가 두개의 일차식으로 인수분해 되려면

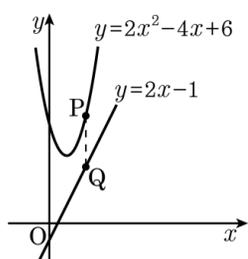
$D = (1 - y)^2 - 4(-6y^2 + 7y + k)$ 가 완전제곱식이어야 한다.

$D = 25y^2 - 30y + (1 - 4k)$ 에서

$$\frac{D}{4} = (-15)^2 - 25(1 - 4k) = 0$$

$$\therefore k = -2$$

6. 다음 그림과 같이 $y = 2x^2 - 4x + 6$ 과 $y = 2x - 1$ 이 y 축에 평행인 직선과 만나는 점을 P, Q 라 할 때, \overline{PQ} 의 최솟값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : $\frac{5}{2}$

해설

\overline{PQ} 가 y 축에 평행하므로 점 P, Q 의 x 좌표는 같다. 이 때, 점 P 의 좌표를 $(t, 2t^2 - 4t + 6)$ 이라고 하면, 점 Q 의 좌표는 $(t, 2t - 1)$ 이다.

$$\overline{PQ} = 2t^2 - 4t + 6 - (2t - 1) = 2t^2 - 6t + 7 = 2\left(t - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$$

$\therefore t = \frac{3}{2}$ 일 때, \overline{PQ} 의 최솟값은 $\frac{5}{2}$

7. 방정식 $x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B = 0$ 의 두 근이 -1 과 -2 일 때, 다른 두 근을 α, β 라 하자. 이 때, $A + B - \alpha\beta$ 의 값을 구하면?

- ① -1 ② -2 ③ -3 ④ 1 ⑤ 2

해설

$f(x) = x^4 + Ax^3 - 7x^2 - Ax + 3B$ 라 하면 $-1, -2$ 가 근이므로
 $f(-1) = 1 - A - 7 + A + 3B = 0$
 $\therefore B = 2$
 $f(-2) = 16 - 8A - 28 + 2A + 3B = 0, -6A + 3B - 12 = 0 \quad \therefore A = -1$
 $\therefore A + B = -1 + 2 = 1 \cdots \cdots \text{㉠}$
 $\therefore (x+1)(x+2)(x^2 - 4x + 3) = 0$
따라서, 다른 두 근은 $x^2 - 4x + 3 = 0$ 의 근이다.
 $\therefore \alpha\beta = 3 \cdots \cdots \text{㉡}$
 $\text{㉠, ㉡에서 } A + B - \alpha\beta = 1 - 3 = -2$

8. 두 이차방정식 $3x^2 - (k+1)x + 4k = 0$, $3x^2 + (2k-1)x + k = 0$ 이 단 하나의 공통인 근 α 를 가질 때, $3k + \alpha$ 의 값은? (단, k 는 실수인 상수)

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 3

해설

공통근이 α 이므로
 $3\alpha^2 - (k+1)\alpha + 4k = 0$
 $3\alpha^2 + (2k-1)\alpha + k = 0$
두 식을 변변끼리 빼면 $3k(\alpha - 1) = 0$
 $k = 0$ 또는 $\alpha = 1$
 $k = 0$ 이면 두 식이 같아지므로
조건에 맞지 않는다.
 $\therefore \alpha = 1$ 을 대입하면
 $3 - (k+1) + 4k = 0, \quad k = -\frac{2}{3}$
 $\therefore 3k + \alpha = -1$

9. 연립부등식 $\begin{cases} 1 < x + 5y < 5 \\ -2 < 2x + 7y < 3 \end{cases}$ 을 성립시키는 정수로 이루어진

순서쌍 (x, y) 중 $x + y$ 의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + 2m$ 의 값을 구하면?

- ① -9 ② -13 ③ -18 ④ -22 ⑤ -26

해설

$1 < x + 5y < 5 \dots\dots \textcircled{㉠}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \dots\dots \textcircled{㉡}$
 $\textcircled{㉠} \times (-2) + \textcircled{㉡}$ 을 하면
 $-10 < -2x - 10y < -2 \dots\dots \textcircled{㉢}$
 $-2 < 2x + 7y < 3 \dots\dots \textcircled{㉣}$
 $\textcircled{㉢} + \textcircled{㉣} = -12 < -3 < 1$
 그러므로, $-\frac{1}{3} < y < 4$
 그런데, y 는 정수이므로 $y = 0, 1, 2, 3$
 이것을 $\textcircled{㉠}, \textcircled{㉡}$ 에 대입하여 적합한 x 의 값을 구하면
 $(x, y) = (-3, 1), (-6, 2), (-7, 2), (-11, 3)$
 따라서, $x + y$ 의 최댓값은 $-3 + 1 = -2$ 이고,
 최솟값은 $-11 + 3 = -8$ 이다.
 $\therefore M = -2, m = -8 \therefore M + 2m = -18$

10. 부등식 $x^2 - 3 < x + \sqrt{4x^2 + 4x + 1}$ 의 해가 $\alpha < x < \beta$ 일 때, $\alpha + \beta$ 의 값은 ?

- ① -1 ② 0 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

해설

주어진 부등식은 $x^2 - 3 < x + |2x + 1|$

(i) $x \geq -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x + 2x + 1, \quad x^2 - 3x - 4 < 0$$

$$(x - 4)(x + 1) < 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq x < 4$$

(ii) $x < -\frac{1}{2}$ 일 때,

$$x^2 - 3 < x - (2x + 1), \quad x^2 + x - 2 < 0$$

$$(x + 2)(x - 1) < 0$$

$$\therefore -2 < x < -\frac{1}{2}$$

(i), (ii)에서 $-2 < x < 4$

$$\therefore \alpha = -2, \beta = 4$$

$$\therefore \alpha + \beta = 2$$

11. 이차부등식 $ax^2 + bx + c > 0$ 을 만족하는 x 의 범위가 $-2 < x < 1$ 일 때, 부등식 $cx^2 - ax + b < 0$ 을 만족하는 x 의 범위는?

- ① $-2 < x < 1$ ② $-1 < x < \frac{1}{2}$ ③ $-\frac{1}{2} < x < 2$
④ $\frac{1}{2} < x < 1$ ⑤ $\frac{1}{2} < x < 2$

해설

$ax^2 + bx + c > 0$ 의 해가 $-2 < x < 1$ 이므로

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} < 0 (a < 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = x^2 + x - 2 < 0$$

$$\therefore \frac{b}{a} = 1, \frac{c}{a} = -2$$

$cx^2 - ax + b < 0$ 에서

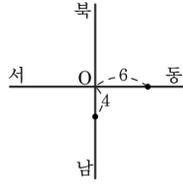
양변을 a 로 나누면

$$\frac{c}{a}x^2 - x + \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 1 > 0$$

$$2x^2 + x - 1 < 0, (2x-1)(x+1) < 0$$

$$\therefore -1 < x < \frac{1}{2}$$

12. 다음의 그림과 같이 수직으로 만나는 도로가 있다. 교차점에서 A는 동쪽으로 6km, B는 남쪽으로 4km 지점에 있다. 지금 A는 시속 4km의 속도로 서쪽으로, B는 시속 2km의 속도로 북쪽을 향하여 동시에 출발했을 때 A, B 사이의 거리가 가장 짧을 때는 출발 후 몇 시간 후인가?



- ① 1 시간 후 ② 1.2 시간 후 ③ 1.4 시간 후
 ④ 1.6 시간 후 ⑤ 2 시간 후

해설

동서를 x 축, 남북을 y 축으로 잡으면 최초의 A, B의 위치는 $A(6, 0)$, $B(0, -4)$ 이고 t 시간 후의 A, B의 좌표는 $A(6-4t, 0)$, $B(0, -4+2t)$ 이다. 따라서, t 시간 후의 \overline{AB} 의 거리는 s 는 $s = \sqrt{(6-4t)^2 + (-4+2t)^2} = \sqrt{20t^2 - 64t + 52} = \sqrt{20\left(t^2 - \frac{64}{20}t\right) + 52} = \sqrt{20\left(t - \frac{8}{5}\right)^2 + \frac{4}{5}}$ 이므로 $t = \frac{8}{5}$ 일 때 최소가 된다. ∴ 출발 후 1.6 시간 후이다.

13. 세 꼭짓점이 $A(-1, -1)$, $B(4, 3)$, $C(0, 1)$ 인 $\triangle ABC$ 에서 \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} 를 $2:3$ 으로 내분하는 점을 각각 D , E , F 라 하자. $\triangle DEF$ 의 무게중심을 (a, b) 라 할 때, $a+b$ 의 값은?

- ① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$\triangle ABC$ 에서 각 변을 $m:n$ 으로 내분하는 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심은 $\triangle ABC$ 의 무게중심과 일치한다.

$\triangle ABC$ 의 무게중심은

$$\left(\frac{-1+4+0}{3}, \frac{-1+3+1}{3} \right),$$

즉 $(1, 1)$ 이므로 $\triangle DEF$ 의 무게중심은 $(1, 1)$ 이다.

$$\therefore a+b=1+1=2$$

14. 직선 $x = 2$ 에 접하고, 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 에 외접하는 원의 중심의 자취를 나타내는 식은?

- ① $y^2 = -8x$ ② $y^2 = 8x$ ③ $y^2 = -12x$
④ $x^2 = -8y$ ⑤ $x^2 = 8y$

해설

구하는 원의 중심을 $P(x, y)$ 라 놓고 x, y 사이의 관계식을 세운다.
점 P 에서 직선 $x = 2$ 에 내린 수선의 발을 B , 원 $(x + 3)^2 + y^2 = 1$ 의 중심을 A 라고 하면
 $\overline{AP} = 1 = \overline{BP}$ 에서
 $\sqrt{(x + 3)^2 + y^2} - 1 = 2 - x$
 $\therefore y^2 = -12x$

15. 집합 $U = \{1, 2, 3, \dots, 99, 100\}$ 이다. 다음 U 의 부분집합 A 중 아래 조건 ㉠과 ㉡를 만족시키며 원소의 개수가 가장 적은 것은?

㉠ $3 \in A$

㉡ $m, n \in A$ 이고 $m + n \in U$ 이면, $m + n \in A$ 이다.

① $A = \{1, 2, \dots, 100\}$

② $A = \{1, 3, 5, \dots, 99\}$

③ $A = \{3, 4, 5, \dots, 100\}$

④ $A = \{3, 6, 9, \dots, 99\}$

⑤ $A = \{3, 9, 15, \dots, 99\}$

해설

$3 \in A, 3 + 3 \in A, 3 + 3 + 3 \in A, \dots$ 이므로 U 의 원소 중 3의 배수가 된다.
따라서 원소의 개수가 가장 적은 A 는 ④

16. 전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 $A = \{1, 4, 5, 7, 8\}$, $A \cap B = \{1, 4, 8\}$ 일 때, 집합 B 가 될 수 있는 부분집합의 개수는?

- ① 2 개 ② 4 개 ③ 8 개 ④ 16 개 ⑤ 32 개

해설

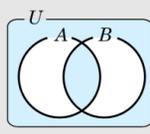
집합 B 는 원소 1, 4, 8을 포함하고 원소 5, 7을 포함하지 않는 U 의 부분집합이므로 $2^{8-3-2} = 2^3 = 8(\text{개})$ 이다.

17. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 등식 $(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = U$ 가 성립할 때, 다음 중 A, B 사이의 관계를 가장 옳게 나타낸 것은?

- ① $A \cup B = U$ ② $A \cap B = B$ ③ $A - B = \emptyset$
 ④ $A = B$ ⑤ $A \cap B = \emptyset$

해설

$(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^c = U$
 이므로 벤다이어그램을 그려보면 하얀 부분, 즉 $(A - B) \cup (B - A) = \emptyset$ 이 됨을 알 수 있다. 따라서 $A - B = \emptyset$ 이고 $B - A = \emptyset$
 $(\because P \cup Q = \emptyset$ 이면 $P = \emptyset$ 이고 $Q = \emptyset$)
 $A \subset B, B \subset A$ ($\because P - Q = \emptyset$ 이면 $P \subset Q$)
 $\therefore A = B$ ($\because P \subset Q, Q \subset P$ 이면 $P = Q$)



18. 전체집합 $U = \{x \mid x \text{는 } 15 \text{ 이하의 홀수}\}$ 에 대하여 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$ 일 때, 다음 보기에서 옳지 않은 것은?

보기

- ㉠ $A \cap B = \{7\}$
- ㉡ $A \cap B^c = \{1, 3, 7, 11\}$
- ㉢ $A^c \cap B = \{13\}$
- ㉣ $A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
- ㉤ $A^c \cap B^c = \{5, 9, 15\}$

▶ 답:

▷ 정답: ㉡

해설

- $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15\}$,
 $A = \{1, 3, 7, 11\}$, $B = \{7, 13\}$
- ㉡ $A \cap B^c = A - B = \{1, 3, 11\}$
 - ㉢ $A^c \cap B = B - A = \{13\}$
 - ㉣ $A^c \cup B^c = (A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 9, 11, 13, 15\}$
 - ㉤ $A^c \cap B^c = (A \cup B)^c = \{5, 9, 15\}$

19. 두 자리 자연수 중 k 의 배수인 것 전체의 집합을 $A_k(k = 1, 2, 3, \dots)$ 라 할 때, 집합 $A_2 \cap (A_3 \cup A_4)$ 의 원소의 개수는?

- ① 26 ② 27 ③ 28 ④ 29 ⑤ 30

해설

$$\begin{aligned} A_2 \cap (A_3 \cup A_4) &= (A_2 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_4) = A_6 \cup A_4 \\ 10 \leq 6n < 100 \text{ 에서 } 2 \leq n \leq 16 &\therefore n(A_6) = 15 \\ 10 \leq 4n < 100 \text{ 에서 } 3 \leq n < 25 &\therefore n(A_4) = 22 \\ 10 \leq 12n < 100 \text{ 에서 } 1 \leq n \leq 8 &\therefore n(A_{12}) = 8 \\ \text{그러므로 } n(A_6 \cup A_4) &= 15 + 22 - 8 = 29 \end{aligned}$$

20. 다음 증명제 $|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta|$ 의 필요조건이기는 하지만 충분조건은 아닌 것을 찾으시오? (단, α, β 는 실수)

- ① $\alpha\beta < 1$ ② $\alpha\beta = -1$ ③ $\alpha\beta = 0$
④ $\alpha^2 + \beta^2 = 0$ ⑤ $\alpha^2 - \beta^2 = 0$

해설

$|\alpha - \beta| = |\alpha + \beta| \rightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 \rightarrow -2\alpha\beta = 2\alpha\beta$
 $\rightarrow \alpha\beta = 0$
0 은 1 보다 작으므로 $\alpha\beta = 0$ 이면 $\alpha\beta < 1$ 라고 말할 수 있다.
따라서, $\alpha\beta < 1$ 는 $\alpha\beta = 0$ 의 필요조건이다.

21. 함수 $f(x)$ 는 모든 함수 $h(x)$ 에 대하여 $(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 를 만족시키고, $g(x) = 3x + 1$ 일 때, $f(7)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$(h \circ f \circ g)(x) = h(x)$ 에서

$h((f \circ g)(x)) = h(x)$ 이므로

$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f(g(x)) = x$

$f(3x + 1) = x$

$3x + 1 = t$ 로 두면 $x = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$ 이고

$f(t) = \frac{1}{3}t - \frac{1}{3}$

$\therefore f(7) = \frac{7}{3} - \frac{1}{3} = 2$

22. 함수 $y = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이기 위한 필요충분조건을 구하면?

① $a + b = 0$ ② $a - b = 0$ ③ $a + b = 1$

④ $a - b = 1$ ⑤ $a + b = 2$

해설

$y = f(x)$ 의 그래프가 y 축에 대하여 대칭이면 $f(x) = f(-x)$ 이다.
 $f(x) = a|x+1| - b|x-1| + 2$ 라 하면
 $f(-x) = a|-x+1| - b|-x-1| + 2$
 $= -b|x+1| + a|x-1| + 2$
 $f(x) = f(-x)$ 에서 $a = -b$
 $\therefore a + b = 0$

23. 양수 a, b 가 $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{a+b}$ 을 만족할 때, $\frac{a^4+b^4}{a^2b^2} + 5$ 의 값을 구하면?

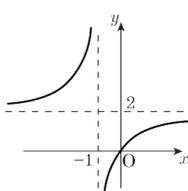
- ① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} - \frac{1}{b} &= \frac{1}{a+b}, \quad \frac{b-a}{ab} = \frac{1}{a+b} \\ (b-a)(b+a) &= ab \\ \therefore b^2 - a^2 &= ab \\ b^2 - a^2 = ab \text{의 양변을 제곱하면} \\ a^4 - 2a^2b^2 + b^4 &= a^2b^2 \\ \therefore a^4 + b^4 &= 3a^2b^2 \\ \therefore \frac{a^4 + b^4}{a^2b^2} + 5 &= 3 + 5 = 8 \end{aligned}$$

24. 함수 $y = \frac{cx+b}{x+a}$ 의 그래프가 그림과 같을 때, $a+b+c$ 의 값은?

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5



해설

점근선이 $x = -1, y = 2$ 이므로 $y = 2 + \frac{k}{x+1}$, ($k \neq 0$)

점 $(0, 0)$ 을 지나므로 $k = -2$

따라서 $y = 2 + \frac{-2}{x+1} = \frac{2x}{x+1}$

$\therefore a = 1, b = 0, c = 2$

$\therefore a + b + c = 3$

25. $x = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}$ 일 때, 다항식 $x^5 - 4x^4 - 7x^3 - 21x^2 - x + 2$ 의 값은?

- ① $4 - 2\sqrt{2}$ ② $4 + 2\sqrt{2}$ ③ $3 - 2\sqrt{2}$
④ $3 + 2\sqrt{2}$ ⑤ $2 - 2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} = \sqrt{17 - 2\sqrt{72}} = 3 - 2\sqrt{2} \text{ 이므로 } x - 3 = -2\sqrt{2} \\ \text{양변을 제곱하면, } (x - 3)^2 &= 8 \\ \therefore x^2 - 6x + 1 &= 0 \\ \text{주어진 식을 } x^2 - 6x + 1 \text{로 나누면} \\ x^5 - 4x^4 - 7x^3 - 21x^2 - x + 2 & \\ &= (x^2 - 6x + 1)(x^3 + 2x^2 + 4x + 1) + x + 1 \\ &= x + 1 \\ &= (3 - 2\sqrt{2}) + 1 \\ &= 4 - 2\sqrt{2}\end{aligned}$$