

1. $2^{16} - 1$ 은 1과 10사이의 어떤 두 수로 나누어떨어진다. 이 때, 이 두 수의 합은?

① 4

② 6

③ 8

④ 10

⑤ 12

해설

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ 임을 이용하여 $2^{16} - 1$ 을 인수분해하면

$$2^{16} - 1 = (2^8)^2 - 1^2$$

$$= (2^8 + 1)(2^8 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^4 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2^2 - 1)$$

$$= (2^8 + 1)(2^4 + 1)(2^2 + 1)(2 + 1)(2 - 1)$$

$$= 257 \cdot 17 \cdot 5 \cdot 3$$

따라서 $2^{16} - 1$ 을 나누었을 때 나누어 떨어지는 1과 10사이의 수

즉, 인수는 3과 5이고 이 두 수의 합은 8이다.

2. 직육면체 모양의 상자가 있다. 이 상자의 모든 모서리의 길이의 합이 20m이고 대각선의 길이가 3m일 때, 이 상자의 겉넓이는 몇 m^2 인가?

① 12m^2

② 13m^2

③ 14m^2

④ 15m^2

⑤ 16m^2

해설

세 모서리의 길이를 a, b, c 라 하면

$$4(a + b + c) = 20, a + b + c = 5$$

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 3, a^2 + b^2 + c^2 = 9$$

$$(\text{겉넓이}) = 2(ab + bc + ca)$$

$$= (a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

$$= 25 - 9 = 16(\text{m}^2)$$

3. 두 다항식 $x^2 + px + q$ 와 $x^2 + qx + p$ 의 최대공약수가 $x - a$ 일 때,
다음 중 옳은 것은?

① $p = q$

② $p + q = 1$

③ $p = q + 1$

④ $pq = 1$

⑤ $p + q = -1$

해설

나머지 정리에 의해 $x = a$ 를 대입하면 $a^2 + pa + q = 0$, $a^2 + qa + p = 0$ 이다.

두식을 빼면, $(p - q)a - (p - q) = 0$, $(p - q)(a - 1) = 0 \Leftrightarrow p = q$
또는 $a = 1$

$p = q$ 이면 최대공약수가 $x^2 + px + q$ 가 되므로, 조건에 맞지 않는다

$\therefore a = 1$ 에서 $p + q = -1$

4. a, b 는 양수라 할 때, 다음 중 $z = a(1+i) + b(1-i), i = \sqrt{-1}$ 의 꼴로 나타낼 수 있는 것은?

① $1 - 3i$

② $2 + 3i$

③ $4 - 2i$

④ $-3 + 2i$

⑤ $2 - 5i$

해설

$z = (a+b) + (a-b)i$ (a, b 는 양수)

① $1 - 3i$ 에서 $a+b=1, a-b=-3$

$a=-1, b=2 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

② $2 + 3i$ 에서 $a+b=2, a-b=3$

$a=\frac{5}{2}, b=-\frac{1}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

③ $4 - 2i$ 에서 $a+b=4, a-b=-2$

$a=1, b=3 \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건을 만족시킴

④ $-3 + 2i$ 에서 $a+b=-3, a-b=2$

$a=-\frac{1}{2}, b=-\frac{5}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

⑤ $2 - 5i$ 에서 $a+b=2, a-b=-5$

$a=-\frac{3}{2}, b=\frac{7}{2} \Rightarrow a, b$ 는 양수라는 조건에 어긋남

5. $x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$ 가 x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어질 때, 상수 a 의 값을 구하면 ?

① $\frac{2}{9}$

② $\frac{1}{3}$

③ $\frac{4}{9}$

④ $\frac{5}{9}$

⑤ $\frac{2}{3}$

해설

$$x^2 + xy + ay^2 + x + y - 2$$

$$= x^2 + (y+1)x + ay^2 + y - 2 \text{가}$$

x, y 의 두 일차식의 곱으로 나타내어지려면

$$D = (y+1)^2 - 4(ay^2 + y - 2)$$

$$= y^2 + 2y + 1 - 4ay^2 - 4y + 8$$

$$= (1-4a)y^2 - 2y + 9 \text{에서}$$

$$\frac{D}{4} = 1 - 9(1-4a) = 0$$

$$\therefore 1 - 9 + 36a = 0$$

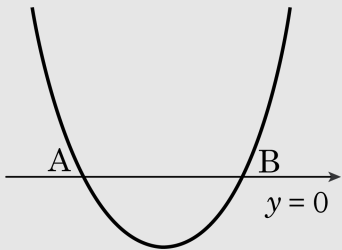
$$\therefore a = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

6. 이차함수 $y = x^2 + ax + a$ 가 x 축과 두 점 A, B 에서 만날 때, $\overline{AB} = 2\sqrt{3}$ 이 되도록 하는 양수 a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▶ 정답 : $a = 6$

해설



A(α , 0) B(β , 0) 이라고 하면 ($\therefore \alpha < \beta$)

$$\alpha + \beta = -a$$

$$\alpha\beta = a \text{ 이므로}$$

$$(\therefore y = x^2 + ax + a)$$

$$(\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = a^2 - 4a$$

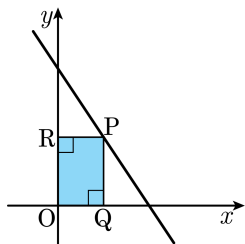
$$\overline{AB} = \beta - \alpha = 2\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$a^2 - 4a = 12$$

$$(a - 6)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = -2, 6$$

7. 직선 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$ 위를 움직이는 한 점 P 가 있다. 점 P 에서 x 축, y 축 위에 내린 수선의 발을 각각 Q, R 라고 할 때, 직사각형 OQPR 의 넓이의 최댓값을 구하여라. (단, 점 P 는 제 1 사분면 위에 있다.)



▶ 답 :

▶ 정답 : $\frac{3}{2}$

해설

직선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x + 3$ 이므로

점 P 의 좌표를 (a, b) 로 놓으면 $b = -\frac{3}{2}a + 3$

$$\begin{aligned}\square\text{OQPR} &= ab = a\left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{2}a^2 + 3a \\ &= -\frac{3}{2}(a-1)^2 + \frac{3}{2}\end{aligned}$$

한편, 점 P 는 제 1 사분면 위의 점이므로

$$a > 0, b = -\frac{3}{2}a + 3 > 0 \quad \therefore 0 < a < 2$$

따라서 $\square\text{OQPR}$ 의 넓이는 $a = 1$ 일 때, 최댓값 $\frac{3}{2}$ 을 갖는다.

8. 이차방정식 $x^2 + mx - m + 1 = 0$ 이 양의 정수근 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 를 가질 때, $\alpha^2 + \beta^2 + m$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 8

해설

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -m & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta = -m + 1 & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

② - ①을 하면 $\alpha\beta - \alpha - \beta = 1$, $(\alpha - 1)(\beta - 1) = 2$

α, β 가 양의 정수이므로

$\alpha - 1 = 1, \beta - 1 = 2$ 또는 $\alpha - 1 = 2, \beta - 1 = 1$

$\therefore (\alpha, \beta) = (2, 3), (3, 2)$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$\alpha + \beta = -m$ 이므로 $m = -5$

$\therefore \alpha^2 + \beta^2 + m = 13 + (-5) = 8$

9. 연립부등식 $-3 < \frac{x+a}{2} \leq 2$ 의 해가 $-7 < x \leq b$ 일 때, $ax - b < 0$ 의 해를 구하면?

① $x < 1$

② $x > 1$

③ $1 < x < 3$

④ $x < 3$

⑤ $x > 3$

해설

$-6 < x + a \leq 4$ 와 $-7 < x \leq b$ 와 같으므로 $-6 - a < x \leq 4 - a$,

$$a = 1, b = 3$$

$$ax - b = x - 3 < 0$$

그러므로 $x < 3$ 이다.

10. x 보다 크지 않은 최대의 정수와 x 보다 작지 않은 최소의 정수의 합이 5일 때, x 는?

① $\left\{\frac{5}{2}\right\}$

② $\{x|2 \leq x \leq 3\}$

③ $\{x|2 \leq x < 3\}$

④ $\{x|2 < x \leq 3\}$

⑤ $\{x|2 < x < 3\}$

해설

$[x]$ 를 x 보다 크지 않은 최대의 정수,
 $<x>$ 를 x 보다 작지 않은 최대의 정수라 하자.
 $x = n$ (n 은 정수)일 때,

$$[x] = n, <x> = n \text{ 이므로 } n + n = 5, n = \frac{5}{2}$$

$\therefore$ 적당하지 않다.

$n < x < n + 1$ (n 은 정수)일 때,

$$[x] = n, <x> = n + 1 \text{ 이므로 } n + n + 1 = 5$$

$$\therefore n = 2$$

$$\therefore 2 < x < 3$$

11. x 에 대한 이차방정식 $x^2 + 2ax + 6 - a = 0$ 의 모든 실근이 모두 1보다 클 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $3 < a \leq 7$

② $-3 \leq a < 7$

③ $-7 < a \leq -3$

④ $a \leq 3$ 또는 $a > 7$

⑤ $a < -7$ 또는 $a \geq -3$

해설

이차함수 $f(x) = x^2 + 2ax + 6 - a$ 의 그래프를
생각하면

$$\frac{D}{4} = a^2 - 6 + a \geq 0, \quad (a+3)(a-2) \geq 0$$

$$\therefore a \leq -3, a \geq 2 \cdots \textcircled{\Gamma}$$

$$f(1) = 1 + 2a + 6 - a > 0$$

$$\therefore a > -7 \cdots \cdots \textcircled{\text{L}}$$

대칭축 $x = -a$ 에서 $-a > 1$

$$\therefore a < -1 \cdots \cdots \textcircled{\text{E}}$$

$\textcircled{\Gamma}$, $\textcircled{\text{L}}$, $\textcircled{\text{E}}$ 의 공통범위는 $-7 < a \leq -3$

12. 직선 $y = x - 1$ 위에 있고 점 $A(1, 0)$, $B(3, 2)$ 에서 같은 거리에 있는 점 P 의 좌표가 (a, b) 일 때, $a^2 + b^2$ 의 값은?

① 3

② 4

③ 5

④ 6

⑤ 7

해설

$y = x - 1$ 위에 있는 점 P 는 $(\alpha, \alpha - 1)$ 로 나타낼 수 있다.

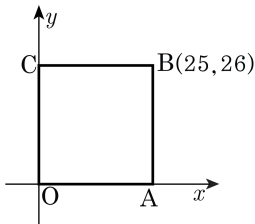
$$\overline{AP}^2 = \overline{BP}^2 \text{ 이므로}$$

$$(\alpha - 1)^2 + (\alpha - 1)^2 = (\alpha - 3)^2 + (\alpha - 3)^2, \alpha = 2$$

$$\therefore P(2, 1)$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 5$$

13. 좌표평면 위에서 x 좌표와 y 좌표가 모두 정수인 점을 격자점이라 한다.
 직선 $y = \frac{3}{8}x + 1$ 은 아래 그림과 같은 직사각형 OABC 내부(경계선 제외)의 격자점을 모두 몇 개 지나는가?



① 1 개

② 2 개

③ 3 개

④ 4 개

⑤ 5 개

해설

$y = \frac{3}{8}x + 1$ 에서 x 가 8의 배수이면 y 도 정수가 된다.

$0 < x < 25$, $0 < y < 26$ 에서 조건을 만족하는 정수의 순서쌍을 구하면

$(8, 4)$, $(16, 7)$, $(24, 10)$ 으로 모두 3개의 격자점을 지난다.

14. 두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$ 의 교점을 지나고, 원점에서부터의 거리가 1 인 직선의 방정식을 $ax+by+c=0$ 이라고 할 때, $a+b+c$ 의 값은?

① -2

② -1 또는 2

③ 4

④ -2 또는 4

⑤ 0 또는 4

해설

두 직선 $x-y+1=0$, $x-2y+3=0$

의 교점을 지나는 직선의 방정식은

$x-2y+3+k(x-y+1)=0$ 으로

나타낼 수 있다. 이 식을 정리하면

$$(1+k)x + (-2-k)y + (3+k) = 0 \cdots \textcircled{1}$$

원점에서 이 직선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{3+k}{\sqrt{(1+k)^2 + (-2-k)^2}} = 1$$

양변에 제곱하여 정리하면

$$(3+k)^2 = (1+k)^2 + (-2-k)^2, k^2 = 4$$

$$\therefore k = \pm 2$$

이것을 ①에 대입하여 정리하면

$$3x - 4y + 5 = 0 \text{ 또는 } x - 1 = 0$$

따라서 $a+b+c$ 는 0 또는 4

15. 다음을 만족하는 집합을 조건제시법으로 알맞게 나타내지 않은 것을 고르면?

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어져있다.
원소들은 각각 2 개의 약수만을 가진 수이다.
원소는 10 미만의 자연수이다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\}$ ② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\}$ ④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\}$

해설

3 개의 홀수와 1 개의 짝수로 이루어진 집합이므로 원소의 개수는 4 개임을 알 수 있다.

원소들은 각각 2 개의 약수만을 가지므로 소수임을 알 수 있다.

원소는 10 미만의 소수이므로 $\{2, 3, 5, 7\}$ 임을 알 수 있다.

- ① $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5\}$
② $\{x \mid x \text{는 } 7 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
③ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
④ $\{x \mid x \text{는 } 9 \text{ 이하의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$
⑤ $\{x \mid x \text{는 } 10 \text{ 미만의 소수}\} = \{2, 3, 5, 7\}$

16. 집합 A, B, C 에 대하여 다음 중 옳지 않은 것은? (단, U 는 전체집합 이고, A^c 는 A 의 여집합이다.)

① $A \subset B$ 이면 $B^c \subset A^c$ 이다.

② $A = B^c$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

③ $A \cap B = \emptyset$ 이고 $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$ 이면 $A \cup B = U$ 이다.

④ $A \subset B, A \subset C$ 이면 $A \subset (B \cup C)$ 이다.

⑤ $A \cap B^c = \emptyset$ 이면 $A^c \cup B = U$ 이다.

해설

① $A \subset B$ 이므로 $B^c \subset A^c$

② $A = B^c$ 이므로 $A \cup B = B^c \cup B = U$

③ 예를 들어 $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ 일 때, $A \cap B = \emptyset$ 이지만 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\} \neq U$ 이므로 옳지 않다.

④ $A \subset B, A \subset C$ 이므로 $A \subset (B \cap C) \subset (B \cup C)$
 $\therefore A \subset (B \cup C)$

⑤ $A \cap B^c = \emptyset$ 에서 $(A \cap B^c)^c = \emptyset^c$
 $\therefore A^c \cup B = U$

17. 집합 $A = \{x | x \text{는 } 18 \text{의 약수}\}$, $B = \{x | x \text{는 } 12 \text{의 약수}\}$ 에 대하여 $(A \cup B) \cap X = X$, $(A \cap B) \cup X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구한 것은?

① 2 개

② 4 개

③ 8 개

④ 16 개

⑤ 32 개

해설

$$A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, B = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 6\}$$

$$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$$

$$(A \cup B) \cap X = X \text{ 이므로 } X \subset (A \cup B)$$

$$(A \cap B) \cup X = X \text{ 이므로 } (A \cap B) \subset X$$

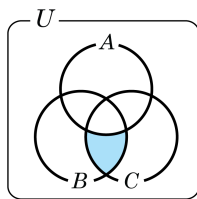
$$\therefore (A \cap B) \subset X \subset (A \cup B)$$

X 는 원소 1, 2, 3, 6을 포함하는

$\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18\}$ 의 부분집합이므로

$$(\text{집합 } X \text{의 갯수}) \equiv 2^{8-4} = 2^4 = 16(\text{개})$$

18. 전체집합 U 에 대하여 세 부분집합 A, B, C 가 다음 벤 다이어그램과 같을 때, 색칠된 부분을 나타내는 집합을 모두 고르면?



① $A^c \cap B \cap C$

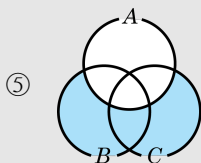
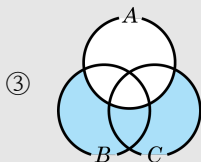
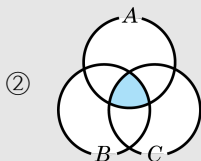
② $A \cap B \cap C$

③ $(B \cup C) - A$

④ $(B \cap C) - A$

⑤ $(B - A) \cup (C - A)$

해설



19. 전체집합 U 의 두 부분집합 A, B 에 대하여 연산 Δ 를 $A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 로 정의할 때, 다음 중에서 $(A\Delta B)\Delta A$ 와 같은 집합은?

① A

② B

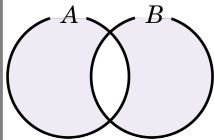
③ $A \cap B$

④ $A \cup B$

⑤ $A - B$

해설

$A\Delta B = (A - B) \cup (B - A)$ 를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다. $(A\Delta B)\Delta A = [(A\Delta B) - A] \cup [A - (A\Delta B)] = (B - A) \cup (A \cap B) = B$



20. $a^2 + b^2 = 2$, $x^2 + y^2 = 2$ 일 때, $ax + by$ 의 최댓값과 $ab + xy$ 의 최댓값의 합은?(단, 문자는 모두 실수이다.)

① 2

② 4

③ 6

④ 8

⑤ 10

해설

$$\text{i) } (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

$$\therefore -2 \leq ax + by \leq 2$$

$$\text{ii) } \frac{a^2 + b^2}{2} \geq \sqrt{a^2 b^2}, \quad 1 \geq |ab|$$

$$\therefore -1 \leq ab \leq 1$$

$$\frac{x^2 + y^2}{2} \geq \sqrt{x^2 y^2}, \quad 1 \geq |xy|$$

$$\therefore -1 \leq xy \leq 1$$

$$\therefore -2 \leq ab + xy \leq 2$$

i), ii)에서, 최댓값의 합은 4

21. 다음 보기의 함수 $f(x)$ 중 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것을 모두 고른 것은?

보기

㉠ $f(x) = x + 1$

㉡ $f(x) = -x$

㉢ $f(x) = -x + 1$

① ㉠

② ㉡

③ ㉢

④ ㉠, ㉢

⑤ ㉡, ㉢

해설

$$\begin{aligned}\text{㉠. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(x+1)) \\ &= f((x+1)+1) = f(x+2) \\ &= (x+2)+1 = x+3 \\ \therefore (f \circ f \circ f)(x) &\neq f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉡. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x)) \\ &= f(-(-x)) = f(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{㉢. } (f \circ f \circ f)(x) &= f(f(f(x))) = f(f(-x+1)) \\ &= f(-(-x+1)+1) = f(x)\end{aligned}$$

따라서 $(f \circ f \circ f)(x) = f(x)$ 가 성립하는 것은 ㉡, ㉢ 이다.

22. 함수 $f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 2009|$ 은 $x = a$ 에서 최솟값을 가진다. 이때, a 의 값은?

① 1001

② 1002

③ 1003

④ 1004

⑤ 1005

해설

$f(x) = |x - 1| + |x - 2| + \cdots + |x - 2009|$ 에서 $f(x)$ 가 최솟값을 갖는 경우는

$$x = \frac{1 + 2009}{2} = 1005 \text{ 일 때이다.}$$

$$\therefore a = 1005$$

23. $abc = 1$ 일 때,

$$\frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{c}{ca+c+1} \text{ 의 값은?}$$

① 1

② 2

③ $\frac{1}{2}$

④ $\frac{2}{3}$

⑤ 3

해설

$$abc = 1 \Rightarrow bc = \frac{1}{a} \text{ 이므로}$$

$$(\text{준식}) = \frac{a}{ab+a+1} + \frac{b}{\frac{1}{a}+b+1} + \frac{c}{ca+c+abc}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{1+ab+a} + \frac{c}{c(a+1+ab)}$$

$$= \frac{a}{ab+a+1} + \frac{ab}{ab+a+1} + \frac{1}{ab+a+1}$$

$$= \frac{ab+a+1}{ab+a+1} = 1$$

24. 분수식 $\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c}$ 의 값을 구하면?

① $-1, 2$

② $1, 2$

③ $2, \frac{1}{2}$

④ $1, \frac{1}{2}$

⑤ $-1, \frac{1}{2}$

해설

$$\frac{b+c}{a} = \frac{a+c}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$

$$b+c = ak \cdots \textcircled{㉠}$$

$$a+c = bk \cdots \textcircled{㉡}$$

$$a+b = ck \cdots \textcircled{㉢}$$

$\textcircled{㉠} + \textcircled{㉡} + \textcircled{㉢}$ 하면

$$2(a+b+c) = k(a+b+c)$$

i) $a+b+c \neq 0$ 이면 $k = 2$

ii) $a+b+c = 0$ 일 때 $b+c = -a$

$$\frac{b+c}{a} = \frac{-a}{a} = -1$$

$$\therefore k = -1, 2$$

25. A 국가의 인구는 전 세계 인구의 $c\%$ 이고, 이 국가의 재산은 전 세계 재산의 $d\%$ 이다. B 국가의 인구는 전 세계 인구의 $e\%$ 이고, 재산은 전 세계 재산의 $f\%$ 이다. A, B 두 국가의 국민이 그 나라의 재산을 평등하게 나누어 가지고 있다고 가정할 때, A 국가의 한 사람이 소유하고 있는 재산의, B 국가의 한 사람이 소유하고 있는 재산에 대한 비의 값을 구하면?

① $\frac{cd}{ef}$

② $\frac{ce}{df}$

③ $\frac{cf}{de}$

④ $\frac{de}{cf}$

⑤ $\frac{df}{ce}$

해설

전 세계의 인구와 재산을 각각 P , W 라 하면

A 국가의 인구와 재산은 각각 $\frac{Pc}{100}$, $\frac{Wd}{100}$ 이므로

$$1 \text{ 인당 재산} = \frac{\frac{Wd}{100}}{\frac{Pc}{100}} = \frac{Wd}{Pc}$$

마찬가지로, B 국가의 1 인당 재산은 $\frac{Wf}{Pe}$

따라서, 구하는 비는 $\frac{\frac{Wd}{Pc}}{\frac{Wf}{Pe}} = \frac{de}{cf}$