1. $x+y=2,\ x^3+y^3=14$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은?

① $xy=-1$　② $x^2+y^2=6$　③ $x^4+y^4=34$

④ $x^5+y^5=86$　⑤ $x^6+y^6=198$

해설

① $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$ 에서

$14=2^3-3xy\times 2$

$\therefore\ xy=-1$

② $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$ 에서

$x^2+y^2=2^2-2(-1)=6$

③ $x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$ 에서

$x^4+y^4=6^2-2(-1)^2=34$

④ $x^5+y^5=(x^2+y^2)(x^3+y^3)-x^2y^2(x+y)$ 에서

$x^5+y^5=6\times 14-(-1)^2\times 2=82\neq 86$

⑤ $x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2x^3y^3$ 에서

$x^6+y^6=14^2-2(-1)^3=198$

2. 다음 등식이 x에 대한 항등식일 때, 상수a, b, c, d에 대하여 $a+b+c+d$의 값을 구하면? (단, $a < c$)

$$(x-a)^2(bx-x^2-1) = (x-c)^2(dx-x^2-1)$$

① -4 ② 4 ③ 5 ④ -5 ⑤ 0

해설

$a < c$에서 $a \neq c$이므로 주어진 등식에서

$x^2-bx+1=(x-c)^2 \quad \therefore\ b=2c,\ 1=c^2$

$x^2-dx+1=(x-a)^2 \quad \therefore\ d=2a,\ 1=a^2$

$\therefore\ a=-1,\ b=2,\ c=1,\ d=-2$

$\therefore\ a+b+c+d=0$

3. x^4-11x^2+1 이 $(x^2+ax+b)(x^2+3x+b)$ 로 인수분해될 때, $a+b$ 의 값은?

① -1　　② -2　　③ -3　　④ -4　　⑤ -5

해설

$$
\begin{aligned}
x^4-11x^2+1 &= (x^2-1)^2-9x^2 \\
&= (x^2-1)^2-(3x)^2 \\
&= (x^2-3x-1)(x^2+3x-1) \\
&= (x^2+ax+b)(x^2+3x+b)
\end{aligned}
$$

$\therefore\ a=-3,\ b=-1$

$\therefore\ a+b=-4$

4. 이차방정식 $x^2-2ix-k=0$의 근에 대한 <보기>의 설명 중 옳은 것을 모두 고르면?

보기

ㄱ $k>1$이면 두 근은 실근이다.

ㄴ $k=1$이면 두 근은 같다.

ㄷ 두 근의 곱은 실수이다.

ㄹ $0<k<1$이면 두 근은 순허수이다.

① ㄱ, ㄴ　② ㄴ, ㄹ　③ ㄱ, ㄴ, ㄷ

④ ㄴ, ㄷ, ㄹ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

해설

근의 공식을 이용하여 $x^2-2ix-k=0$ 의 근을 구하면 $x=i\pm\sqrt{-1+k}$

ㄱ $k>1$이어도 x는 허수이다.<거짓>

ㄴ $k=1$이면 $x=i$로 두 근은 같다.<참>

ㄷ 두 근의 곱 $-k$는 허수일 수도 있다.<거짓>

ㄹ $0<k<1$이면 $-1<-1+k<0$ 이므로 $\sqrt{-1+k}=ai$ 의 형태가 되어 x는 순허수이다.<참>

5. 방정식 $3x^2+5x-2=0$의 두 근을 α, β라 하고 방정식 $5x^2+4x+3=0$의 두 근을 γ, δ라 할 때, $\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$의 값은?

① $-\frac{10}{3}$ ② $-\frac{7}{3}$ ③ $-\frac{4}{3}$ ④ $-\frac{1}{3}$ ⑤ 1

해설

$\alpha+\beta=-\frac{5}{3},\ \alpha\beta=-\frac{2}{3},\ \gamma+\delta=-\frac{4}{5},\ \gamma\delta=\frac{3}{5}$

$$\frac{1}{\alpha\gamma}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\delta\beta}+\frac{1}{\delta\alpha}$$

$$=\frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\alpha}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\left(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\delta}\right)$$

$$=\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{\gamma+\delta}{\gamma\delta}\right)$$

$$=\frac{-\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}\times\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=-\frac{10}{3}$$

6. 이차함수 $y = ax^2 + bx + c$ 는 $x = 2$ 에서 최솟값 4 를 가지고, 점 $(3,\ 6)$ 을 지난다. 이 때, a 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 2

해설

$$y = ax^2 + bx + c$$
$$= a(x-2)^2 + 4$$

점 $(3,\ 6)$ 을 지나므로 $a(3-2)^2 + 4 = 6$

$\therefore a = 2$

7. 삼차방정식 $x^3 = 1$의 한 허근을 ω라 하고 $f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$라 정의할 때, $f(n) = 0$이 되게 하는 자연수 n의 최솟값은?

① 2　② 4　③ 5　④ 6　⑤ 7

해설

$x^3 - 1 = 0$

$(x-1)(x^2+x+1) = 0$

$x^2+x+1 = 0$의 한 근 ω

$\Rightarrow \omega^3 = 1, \omega^2+\omega+1 = 0$

$$f(n) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2}+\cdots+\frac{1}{\omega^n}$$

$$f(1) = 1+\frac{1}{\omega} = \frac{\omega+1}{\omega} = \frac{-\omega^2}{\omega} = -\omega$$

$$f(2) = 1+\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega^2} = \frac{\omega^2+\omega+1}{\omega^2} = 0$$

자연수 n의 최솟값은 2

8. 연립방정식 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=3 \\ x+y=2 \\ y-z=a \end{cases}$ 가 실수해를 갖기 위한 실수 a의 값의 범위를 $\alpha \le a \le \beta$ 라고 할 때, $\alpha+\beta$ 의 값은?

① -4 ② -2 ③ 0 ④ 2 ⑤ 4

해설

$x=2-y, z=y-a$ 이므로

$(2-y)^2+y^2+(y-a)^2=3$

즉, $3y^2-2(a+2)y+a^2+1=0$

$D/4=(a+2)^2-3(a^2+1)=-2a^2+4a+1\ge 0$

$2a^2-4a-1\le 0$

$\therefore \dfrac{2-\sqrt{6}}{2} \le a \le \dfrac{2+\sqrt{6}}{2}$

$\therefore \alpha+\beta=2$

9. 모든 실수 x에 대하여, 부등식 $k\{x^2-(k-2)x-3(k-2)\}>0$가 성립되게 하는 상수 k값의 범위를 구하면?

① $0<k<2$ ② $1<k<2$ ③ $1<k<4$

④ $-1<k<3$ ⑤ $-2<k<-1$

해설

모든 실수 x에 대하여 성립하므로

$k>0\cdots$①

$x^2-(k-2)x-3(k-2)>0$이 항상 성립하려면

$D=(k-2)^2+12(k-2)<0$에서

$(k-2)(k+10)<0$

$\therefore\ -10<k<2\cdots$②

①, ②에서 $0<k<2$

10. x가 실수일 때, 두 함수 $f(x) = x^2 + 2x - 8$, $g(x) = x^2 - 19$ 에 대하여 부등식 $(f \circ g)(x) \leq 0$ 을 만족하는 양의 정수 x 는?

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

해설

$g(x) = k$ 라고 하면

$(f \circ g)(x) \leq 0 \Rightarrow f(k) \leq 0$

$\Rightarrow -4 \leq k \leq 2$

$\Rightarrow -4 \leq g(x) \leq 2$

$\Rightarrow 15 \leq x^2 \leq 21$

$\therefore$ 양의 정수 $x = 4$

11. 두 부등식 $x^2-2x-3>0$,
$x^2+ax+b\le 0$에 대하여
두 부등식 중 적어도 하나를 만족하는 x의 값은 실수 전체이고, 두 부등식을 동시에 만족하는 x의 값은 $3<x\le 4$일 때, $a+b$의 값을 구하면?

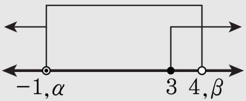
① -6 ② -7 ③ -8 ④ -9 ⑤ -10

해설

$(x+1)(x-3)>0 \Rightarrow \quad x<-1$ 또는 $x>3$

$x^2+ax+b\le 0 \Rightarrow \alpha\le x\le\beta$ 라 하자

주어진 조건을 만족하려면



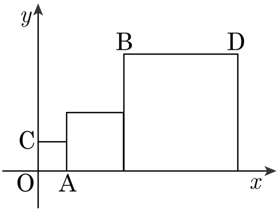
$\therefore \alpha=-1, \beta=4$

$(x+1)(x-4)=x^2-3x-4$

$a=-3, b=-4$

$\therefore a+b=-7$

12. 좌표평면 위에 다음의 그림과 같이 세 개의 정사각형이 있다. 점 $\mathrm{C}(0, 4)$, 점 $\mathrm{D}(21, 12)$일 때, 두 점 A, B 사이의 거리를 구하면?



① 11 ② 13 ③ 15

④ 17 ⑤ 21

해설

가장 작은 정사각형의 한 변의 길이가 4 이므로

점 $\mathrm{A}(4,\ 0)$ 가장 큰 정사각형의 한 변의 길이가 12 이므로

점 $\mathrm{B}(21-12,\ 12)$

즉, $\mathrm{B}(9,\ 12)$

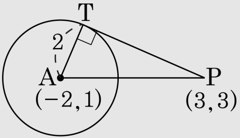
$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{(9-4)^2 + 12^2} = 13$

13. 점 $(3,\ 3)$ 에서 원 $x^2+y^2+4x-2y+1=0$ 에 그은 접선의 길이는?

① 5 ② $\sqrt{26}$ ③ 6 ④ $\sqrt{37}$ ⑤ 7

해설

준식에서 $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2$ 이므로
중심이 $(-2,\ 1)$ 반지름의 길이가 2 인 원이다.



$$\overline{\mathrm{PT}}^2=\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{AT}}^2$$
$$=(3+2)^2+(3-1)^2-2^2$$
$$=25$$
$$\therefore\ \overline{\mathrm{PT}}=5$$

14. 원 $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 위의 점에서 직선 $4x - 3y + 5 = 0$ 에 이르는 거리의 최댓값과 최솟값의 합은?

① 3 ② 4 ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

해설

최댓값은 원 중심에서 직선까지 거리 더하기 반지름이고, 최솟값은 원 중심에서 직선까지 거리 빼기 반지름이다.

원의 방정식 : $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 4$

$$\Rightarrow \text{최대} : \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} + 2 = 5$$

$$\Rightarrow \text{최소} : \frac{|4 \times 1 - 3 \times (-2) + 5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} - 2 = 1$$

$\therefore$ 최댓값 $+$ 최솟값 $= 6$

15. 세 집합 A, B, C 에 대해서 $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 의 포함 관계를 가질 때, 다음 중 $A = B = C$ 의 관계가 되는 경우를 모두 고른 것은?

보기

㉠ $A = B$	㉡ $A = C$	㉢ $B = C$
㉣ $B \subset A$	㉤ $C \subset A$	㉥ $C \subset B$

① ㉠, ㉡ ② ㉡, ㉣ ③ ㉢, ㉤ ④ ㉡, ㉤ ⑤ ㉤, ㉥

해설

㉡ $A = C$ 면 $A \subset C$, $C \subset A$ 이므로, $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.

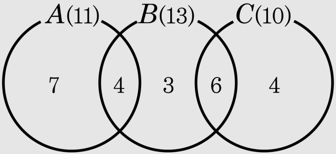
㉤ $A \subset B$ 이고 $B \subset C$ 이므로, $C \subset A$ 일 때 $A = B = C$ 의 관계가 성립한다.

16. 세 집합 A, B, C 에 대하여 $n(A)=11$, $n(B)=13$, $n(C)=10$, $n(A\cap B)=4$, $n(B\cup C)=17$, $A\cap C=\varnothing$ 일 때, $A\cup B\cup C$ 의 원소의 개수는?

① 12 ② 17 ③ 24 ④ 30 ⑤ 34

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=24$

17. 집합 $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 일 때, 집합 B 의 원소의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 16

해설

$n((A \cup B) \cap (A \cap B)^c) = 0$ 이라는 것은 $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$ 가 공집합이라는 것을 뜻한다.

$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = (A \cup B) - (A \cap B) = \varnothing$

$\rightarrow A = B$

따라서, 집합 B 의 원소의 합은 16

18. A 반 학생 60 명 중에서 수학을 좋아하는 학생은 33 명, 영어를 좋아하는 학생은 30 명이고, 수학과 영어 중 한 과목만 좋아하는 학생은 29 명이라고 한다. 이때, 수학도 영어도 모두 싫어하는 학생은 몇 명인지 구하여라.

▶ 답 : ______ 명

▷ 정답 : 14 명

해설

수학을 좋아하는 학생의 수 : $n(A) = 33$,
영어를 좋아하는 학생의 수 : $n(B) = 30$
$n(A \cup B) - n(A \cap B) = 29$,
$n(A \cap B) = (33 + 30 - 29) \div 2 = 17$,
$n(A \cup B) = 46$
$\therefore\ n(U) - n(A \cup B) = 14$ (명)

19. 미영이네 반 학생들에 대하여 수학, 영어 두 과목에 대한 선호도 조사를 실시하였다. 그 결과 수학을 좋아하는 학생은 36명, 영어를 좋아하는 학생은 27명이었고, 수학과 영어를 모두 좋아하는 학생은 15명이었다. 이 때, 수학 또는 영어 한 과목만 좋아하는 학생은 몇 명인가?

① 27명 ② 30명 ③ 33명 ④ 36명 ⑤ 39명

해설

수학을 좋아하는 학생의 집합을 A, 영어를 좋아하는 학생의 집합을 B라 하면 $n(A) = 36,\ n(B) = 27,\ \ n(A \cap B) = 15$이므로

$n(A \cup B) = 36 + 27 - 15 = 48$

따라서 수학 또는 영어 한 과목만을 좋아하는 학생 수는 $n(A \cup B) - n(A \cap B) = 48 - 15 = 33$ (명)

20. $a > 1$일 때, $\dfrac{1}{a-1} + 4a - 3$의 최솟값은?

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

해설

$$\frac{1}{a-1} > 0$$

$$4(a-1) + 1 + \frac{1}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{4(a-1) \cdot \frac{1}{(a-1)}} + 1$$

$$= 2 \cdot 2 + 1 = 5$$

21. 두 집합 $X = \{-1,\ 0,\ 1\}$, $Y = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$에 대하여 X 에서 Y 로의 함수 중 다음 조건을 모두 만족시키는 함수 f 의 개수는 몇 개인가?

> X 의 임의의 두 원소 $x_1,\ x_2$ 에 대하여
> Ⅰ. $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$
> Ⅱ. $f(x_1) = f(x_2)$ 이면 $x_1 = x_2$

① 2 개　② 4 개　③ 6 개　④ 8 개　⑤ 12 개

해설

조건 Ⅰ 에서, $x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이면
$f(0) = f(0) + f(0)$ 에서 $f(0) = 0$
$x_1 = 1,\ x_2 = -1$ 이면
$f(0) = f(1) + f(-1)$ 에서, $f(-1) = -f(1)$
이때, 조건 Ⅱ 에 의해
$f(1) \neq 0,\ f(-1) \neq 0$
따라서, 두 조건을 만족시키는
함수 f 의 개수는 0 이 대응 할 수 있는
원소는 0 의 1 가지,
1 이 대응할 수 있는 원소는
$-2,\ -1,\ 1,\ 2$ 의 4 가지,
-1 이 대응할 수 있는 원소는 $-f(1)$ 의 1 가지,
따라서, $1 \times 4 \times 1 = 4$ (개)

22. $f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에 대하여 $f_{n+1}(x) = f_1 \circ f_n(x)(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 라 할때 $f_{2008}(1)$ 의 값은?

① $\dfrac{1}{2007}$ ② $\dfrac{1}{2008}$ ③ $\dfrac{1}{2009}$ ④ $\dfrac{1}{4017}$ ⑤ $\dfrac{1}{4018}$

해설

$f_1(x) = \dfrac{x}{x+1}$ 에서

$$f_2(x) = (f_1 \circ f_1)(x) = f_1\left(\frac{x}{x+1}\right) = \frac{\frac{x}{x+1}}{\frac{x}{x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{2x+1}$$

$$f_3(x) = (f_1 \cdot f_2)(x)$$

$$= f_1\left(\frac{x}{2x+1}\right) = \frac{\frac{x}{2x+1}}{\frac{x}{2x+1}+1}$$

$$= \frac{x}{3x+1}$$

$$\vdots$$

이상에서 $f_{2008}(x)$ 를 추정하면

$$f_{2008}(x) = \frac{x}{2008x+1}$$

$$\therefore\ f_{2008}(1) = \frac{1}{2008 \times 1 + 1} = \frac{1}{2009}$$

23. 양수 a, b, c, d 는 $a : b = c : d$가 성립한다. 다음 중 옳지 <u>않은</u> 것은?

① $ad + bc = 2ad$

② $\dfrac{ad}{bc} = 1$

③ $\dfrac{bc-1}{bc} + \dfrac{1}{ad} = 1$

④ $\dfrac{1}{bc} - \dfrac{1}{ad} = 0$

⑤ $a - b = \dfrac{1}{c-d}$

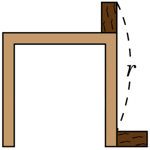
해설

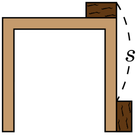
①, ② $ad = bc$

③ $\dfrac{adbc - ad + bc}{adbc} = \dfrac{adbc}{adbc} = 1$

④ $\dfrac{1}{bc} = \dfrac{1}{ad}$

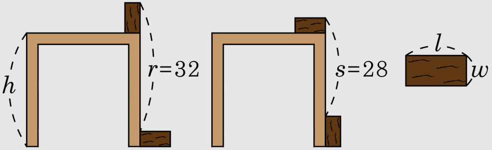
24. 탁자의 높이를 재기 위하여 그림과 같이 크기가 같은 2개의 나무 블럭을 쌓아 보았더니 [그림1] 의 높이 r은 32이었고, [그림2] 의 높이 s는 28이었다. 이 탁자의 높이는?





① 28 ② 29 ③ 30 ④ 31 ⑤ 32

해설



책상의 높이를 h, 나무토막의 길이를 l, 폭을 w라 하자.

$l+h-w=32,\ w+h-l=28$

두 식을 더하면 $2h=60$

$\therefore\ h=30$

25. $x=\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$, $y=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$ 일 때, $\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{x+y}{4}}-\sqrt{1-\dfrac{x+y}{4}}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$$x=\frac{2}{\sqrt{3}-1}=\sqrt{3}+1$$

$$y=\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{3}-1,\ x+y=2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{1+\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1+\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4+2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$$

$$\sqrt{1-\frac{x+y}{4}}=\sqrt{1-\frac{2\sqrt{3}}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4-2\sqrt{3}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$$

주어진 식에 대입하면

$$\frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)-\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)}=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=1$$