1. 등식 $\frac{2x^2+13x}{(x+2)(x-1)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}$ 가 x에 대한 항등식이 되도록 상수 $A,\ B,\ C$의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8 ④ 9 ⑤ 10

해설

양변에 $(x+2)(x-1)^2$을 곱하면
$2x^2+13x = A(x-1)(x+2)+B(x+2)+C(x-1)^2$에서
$x=1,\ -2,\ 0$을 차례로 대입하여 $A,\ B,\ C$를 구하면
$B=5,\ C=-2,\ A=4$
$\therefore\ A+B+C=7$

2. 1000^{10} 을 1001로 나눌 때 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R라 할 때, 다음 중 나머지 R를 구하기 위한 가장 적절한 식은?

① $x^{10} = xQ(x) + R$

② $x^{10} = (x-1)Q(x) + R$

③ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R$

④ $x^{10} = (x-1)^{10}Q(x) + R$

⑤ $x^{10} = (x+1)Q(x) + R + 1$

해설

$1000^{10} = 1001 \cdot Q(x) + R$에서 $1000 = x$라 하면
$x^{10} = (x+1)Q(x) + R$
$x = -1$을 대입하면 $R = 1$을 구할 수 있다.

3. $a(a+1)=1$일 때, $\frac{a^6-1}{a^4-a^2}$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 4

해설

$\frac{a^6-1}{a^4-a^2}=\frac{(a^3+1)(a^3-1)}{a^2(a^2-1)}$

$=\frac{(a+1)(a^2-a+1)(a-1)(a^2+a+1)}{a^2(a+1)(a-1)}$

$=\frac{(a^2-a+1)(a^2+a+1)}{a^2} \leftarrow a^2=1-a$ 대입

$=\frac{2(1-a)\times 2}{1-a}=4$

4. x, y 가 실수이고, 복소수 $z = x + yi$ 와 켤레복소수 $\bar{z} = x - yi$ 와의 곱이 $z \cdot \bar{z} = 1$ 일 때, $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i$ 의 값은?

① $\frac{y}{2}$　　② $-y$　　③ $2x$　　④ $\frac{-x}{2}$　　⑤ 100

해설

$z \cdot \bar{z} = 1$ 에서 $\bar{z} = \frac{1}{z}$ 이다.

그러므로 $\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) i = \frac{1}{2}(z - \bar{z})i$

$$= \frac{1}{2}(x + yi - x + yi)i$$

$$= \frac{1}{2}(2yi)i = -y$$

5. $a=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ 일 때, a^5+a^3-1 의 값을 구하면? (단, $i=\sqrt{-1}$)

① $\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$ ② 0 ③ 1

④ $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ ⑤ $-1+\sqrt{3}i$

해설

$a=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

$2a+1=-\sqrt{3}i$ 의 양변을 제곱하면,

$4a^2+4a+1=-3 \quad \Rightarrow \quad a^2+a+1=0$

양변에 $a-1$ 를 곱하면

$(a-1)(a^2+a+1)=0 \Leftrightarrow a^3-1=0$

$\therefore\ a^3=1$

(준식) $=a^3a^2+a^3-1$

$=a^2$

$=-a-1(\because a^2+a+1=0)$

$=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$

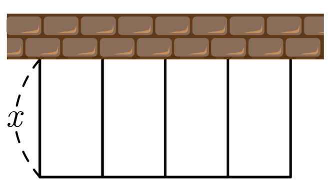
6. $y=0$, $y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$을 동시에 만족하는 $(x,\ y)$가 2개일 때, 정수 k의 최댓값은?

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

해설

$y=(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1$의 그래프는 x축과 서로 다른 두 점에서 만난다.
이 때, 방정식 $(k-2)x^2-6(k-1)x+9k+1=0$은 이차방정식이어야 하므로 $k-2\neq 0$
$\therefore k\neq 2 \cdots\cdots$ ㉠
또, 이차방정식의 판별식을 D 라하면 $D>0$이어야 하므로
$\frac{D}{4}=\left\{3(k-1)\right\}^2-(k-2)(9k+1)>0$
$9\left(k^2-2k+1\right)-\left(9k^2-17k-2\right)>0$
$-k+11>0$
$\therefore k<11 \cdots\cdots$ ㉡
㉠, ㉡에서 $k<11,\ k\neq 2$
따라서, 정수 k의 최댓값은 10이다.

7. 60m 의 철망으로 다음 그림과 같이 담장을 이용하여 똑같은 크기의 직사각형 모양의 닭장을 4 개 만들려고 한다. 4 개의 닭장의 넓이의 합의 최댓값은?



① 140m^2 ② 160m^2 ③ 180m^2
④ 200m^2 ⑤ 240m^2

해설

닭장 한 개의 가로의 길이는 $\frac{60-5x}{4}$

닭장의 넓이의 합은 $x\left(\frac{60-5x}{4}\right)\times 4 = x(60-5x)$ 이다.

$\therefore -5x^2+60x = -5(x^2-12x+36)+180$
$= -5(x-6)^2+180$

8. 사차방정식 $x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$을 만족하는 실수 x에 대하여 $x + \frac{1}{x} = a$라 하자. 이 때, a가 될 수 있는 모든 값의 합은?

① -2 ② -1 ③ 0 ④ 1 ⑤ 2

해설

$x^4 - x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$의 양변을
x^2으로 나누면
$x^2 - x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$
$\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 6 = 0$
$x + \frac{1}{x} = a$로 치환하면
$a^2 - a - 6 = 0$, $(a-3)(a+2) = 0$
$\therefore\ a = 3$ 또는 $a = -2$
따라서, 모든 A의 값의 합은 $3 + (-2) = 1$

9. 두 부등식 $3x-4<x+6$ 과 $1-3x\le -5$를 모두 만족하는 수 중에서 가장 작은 정수는?

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$3x-4<x+6,\ x<5$

$1-3x\le -5,\ 2\le x<5$

따라서 모두 만족하는 수는 $2\le x<5$이므로 가장 작은 정수는 2 이다.

10. $x+3y=5$, $4y+3z=6$ 일 때, 부등식 $x<3y<5z$ 를 만족시키는 x 의 값의 범위를 구하면?

① $\frac{5}{6}<x<\frac{10}{9}$ ② $\frac{30}{29}<x<\frac{5}{3}$ ③ $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$
④ $\frac{5}{2}<x<\frac{90}{29}$ ⑤ $-\frac{90}{29}<x<-\frac{5}{2}$

해설

$x+3y=5$를 y에 관하여 풀면

$y=\frac{5-x}{3}$

$4y+3z=6$을 z에 관하여 풀면

$z=\frac{6-4y}{3}=2-\frac{4}{3}y$

$y=\frac{5-x}{3}$을 대입하면

$z=2-\frac{4}{3}\times\frac{5-x}{3}=2-\frac{20-4x}{9}=\frac{4x-2}{9}$

$y=\frac{5-x}{3}$, $z=\frac{4x-2}{9}$를 부등식에 대입하면

$x<5-x<5\times\frac{4x-2}{9}$

$x<5-x$, $2x<5$

$x<\frac{5}{2}$ $\cdots$㉠

$5-x<\frac{5(4x-2)}{9}$, $45-9x<20x-10$,

$\frac{55}{29}<x$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $\frac{55}{29}<x<\frac{5}{2}$

11. 세 부등식 A가 $3(x-1) > 12+4(2x-5)$, B가 $2(3-2x) < -x+10$, C가 $2x+1 > a$이다. A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수는 존재하지 않을 때, a 의 값 중에서 가장 큰 정수는?

① -3　　② -2　　③ -1　　④ 0　　⑤ 1

해설

$3(x-1) > 12+4(2x-5)$ 를 풀면 $x < 1$

$2(3-2x) < -x+10$ 을 풀면 $-\frac{4}{3} < x$

A와 B의 공통해는 $-\frac{4}{3} < x < 1$

$2x+1 > a$ 를 풀면 $x > \frac{a-1}{2}$

C를 제외한 수는 $x \le \frac{a-1}{2}$ 이므로

A와 B의 공통해에서 C를 제외한 수가 존재하지 않기 위해서

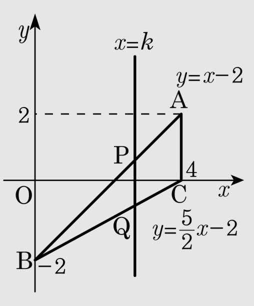
$\frac{a-1}{2} \le -\frac{4}{3}$, $a \le -\frac{5}{3}$가 되어야 한다.

$\therefore$ (가장 큰 정수)$= -2$

12. 세 점 A (4, 2) , B (0, -2), C (4, 0)을 꼭지점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 직선 $x=k$가 삼각형 ABC의 넓이를 이등분할 때, k의 값은?

① $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ ② $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

해설



직선 $x=k$와 $\overline{\mathrm{AB}}$, $\overline{\mathrm{BC}}$와의 교점을 각각 P, Q라 하면

P $(k,\ k-2)$, Q $\left(k,\ \dfrac{1}{2}k-2\right)$이다.

삼각형 ABC의 넓이가 $\dfrac{1}{2}\times 2\times 4=4$이므로

삼각형 PBQ의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\left\{(k-2)-\left(\dfrac{1}{2}k-2\right)\right\}\times k=2,\ k^2=8$

$\therefore k=2\sqrt{2}\ (\because\ 0<k<4)$

13. A(1, 5), B(7, −1), P(x, y) 에 대하여 $\overline{AP} \perp \overline{BP}$ 임을 만족하는 자취 방정식은?

① $x^2 + y^2 = 1$
② $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$
③ $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 10$
④ $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 12$
⑤ $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

해설

$\overline{AP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y-5}{x-1}$

$\overline{BP}$ 의 기울기 : $\dfrac{y+1}{x-7}$

두 직선이 수직하면 기울기의 곱이 −1 이다.

$\Rightarrow \quad \dfrac{y-5}{x-1} \times \dfrac{y+1}{x-7} = -1$

$\Rightarrow \quad y^2 - 4y - 5 = -x^2 + 8x - 7$

$\Rightarrow \quad (x-4)^2 + (y-2)^2 = 18$

14. 점 $(-2,\ 1)$ 을 직선 $y=x-1$ 에 대하여 대칭이동한 점의 좌표를 $(a,\ b)$ 라 할 때, ab 의 값은?

① -8 ② -6 ③ -5 ④ -3 ⑤ -2

해설

두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 선분의
중점이 직선 $y=x-1$ 위에 있으므로
$\dfrac{1+b}{2}=\dfrac{-2+a}{2}-1$,
$\therefore\ a-b=5\ \cdots$ ㉠
또, 두 점 $(-2,\ 1)$, $(a,\ b)$ 를 이은 직선의
기울기가 -1 이므로 $\dfrac{b-1}{a-(-2)}=-1$
$\therefore\ a+b=-1\ \cdots$㉡
㉠, ㉡ 을 연립하여 풀면 $a=2$, $b=-3$
$\therefore\ ab=-6$

15. 실수 전체의 집합 R 의 부분집합 S 가 다음 두 조건을 만족시킬 때, 옳지 않은 것을 고르면? (단, n 은 자연수)

Ⅰ. $5 \in S,\ 7 \in S$ Ⅱ. $p \in S,\ q \in S$ 이면 $p+q \in S$

① $5n \in S$　② $7n \in S$　③ $12n+1 \in S$
④ $12n+2 \in S$　⑤ $17n+3 \in S$

해설

① $p=q=5$ 이면 $p+q=5\times 2 \in S$
$p=5\times 2,\ q=5$ 이면 $p+q=5\times 3 \in S$
이와 같이 계속하면 $5n \in S$
② ①과 같은 방법으로 $7n \in S$
③ S 를 작은 수부터 차례로 써 보면
$S=\{5,\ 7,\ 10,\ 12,\ 14, \ldots\}$ 이므로
$13 \notin S \ \leftarrow\ 13 = 12\times 1+1$
④ $12n+2 = 5n+7n+7-5 = 5(n-1)+7(n+1)$ 이므로
①, ②에 의해서 $12n+2 \in S$
⑤ $17n+3 = 10n+7n+10-7$
$= 5(2n+2)+7(n-1) \in S$

16. 세 집합 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B = \left\{x \mid x\text{는 10 이하의 자연수}\right\}$, $X = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$ 에 대하여 $A \subset X \subset B$ 일 때, n 의 최댓값과 최솟값의 차를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 5

해설

$A \subset X \subset B$ 이므로, $A = X$ 일 때, n 이 최솟값을 갖고, $X = B$ 일 때, n 이 최댓값을 갖는다.
따라서 $A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\} = X$, $n = 5$ (최솟값)
$B = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\} = X$,
$n = 10$ (최댓값)
$\therefore\ 10 - 5 = 5$

17. 실수 전체 집합의 두 부분집합 $A=\{a^2-2a-1, 3\}$, $B=\{2, 4-a, 2a^2-a\}$ 에 대하여 $B-A^c=\{2\}$ 일 때, $A\cup B$ 의 모든 원소의 합을 구하면?

① 10　② 16　③ 21　④ 25　⑤ 30

해설

$B-A^c=B\cap(A^c)^c=B\cap A=\{2\}$ 이므로 집합 A 에는 원소 2가 들어있다.
따라서 $a^2-2a-1=2$, $a^2-2a-3=0$
$\therefore a=-1, a=3$ 이다.
ⅰ) $a=-1$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{2,3,5\}$
$\therefore A\cap B=\{2,3\}$ 이므로 부적당
ⅰ) $a=3$ 일 때, $A=\{2,3\}$, $B=\{1,2,15\}$
$A\cap B=\{2\}$이고, 이 때 $A\cup B=\{1,2,3,15\}$
따라서 $A\cup B$ 의 모든 원소의 합은 21 이다.

18. 세 집합 P, Q, R 에 대하여 $n(P) = 19,\ n(Q \cap R) = 7,\ n(P \cap Q \cap R) = 3$ 일 때, $n(P \cup (Q \cap R))$ 을 구하여라.

▶ 답:

▷ 정답: 23

해설

$n(P \cup (Q \cap R))$
$= n(P) + n(Q \cap R) - n(P \cap Q \cap R)$
$= 19 + 7 - 3 = 23$

19. 전체집합 $U = \{x \mid |x| \le 2\text{인 정수}\}$ 의 두 부분집합 $A = \{x \mid |x| \le 1\text{인 정수}\}$, $B = \{x \mid 0 < x < 3\text{인 정수}\}$ 에 대하여 $A^c \cap B^c$ 을 원소나열법으로 나타내어라.

▶ 답 :

▷ 정답 : $\{-2\}$

해설

$U = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$

$A^c = \{-2, 2\}$, $B^c = \{-2, -1, 0\}$

$A^c \cap B^c = \{-2\}$

20. 학생 수가 40 명인 어느 학급에서 두 종류의 치약 A, B 를 사용해 본 학생 수를 조사했더니 각각 20명, 30 명이었다. 두 종류의 치약을 모두 사용해 본 학생 수의 최댓값을 M, 최솟값을 m 이라 할 때, $M+m$의 값을 구하면?

① 10 ② 20 ③ 30 ④ 40 ⑤ 50

해설

$$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$= 50-n(A\cap B)$$
$n(A\cap B) = 50-n(A\cup B)\cdots$ ㉠

i) $n(A\cap B)$가 최대인 경우는 치약 A를 사용한 학생이 모두 치약 B를 사용한 경우이다 $\Rightarrow M=20$

ii) $n(A\cap B)$ 가 최소인 경우는 ㉠에서 $n(A\cup B)$ 가 최대인 경우이다.

$\Rightarrow n(A\cup B)=40, n(A\cap B)=10=m$

$\therefore m+M=10+20=30$

21. 함수 $f(x) = x - 1$ 에 대하여 $\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(a) = 1$ 을 만족하는 상수 a 의 값은? (단, 밑줄 그은 부분의 f 의 갯수는 10개)

① -10　② -5　③ 1　④ 5　⑤ 11

해설

$f(x) = x - 1$

$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x-1) = (x-1) - 1 = x - 2$

$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(x-2) = (x-2) - 1 = x - 3$

$\vdots$

$\underline{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}(x) = x - 10$

밑줄 그은 부분은 10개.

따라서, $a - 10 = 1$ 에서 $a = 11$

22. 일차함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를 $y = x$ 에대칭이동한 그래프의 함수를 $g(x)$ 라고 하자. 두 함수 $f,\ g$ 가 $f(2) = 5,\ g(2) = 1$ 을 만족할 때, $f(4)$ 의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

해설

함수 $f(x) = ax + b(a \neq 0)$ 의 그래프를
$y = x$ 에 대하여 대칭이동한 그래프는
$y = f^{-1}(x)$ 의 그래프이다.
따라서 $g(2) = 1$ 에서 $f^{-1}(2) = 1$
$\therefore\ f(1) = 2$
$f(1) = a + b = 2,\ f(2) = 2a + b = 5$
위의 식에서 $a = 3,\ b = -1$
$\therefore\ f(x) = 3x - 1$
$\therefore\ f(4) = 3 \cdot 4 - 1 = 11$

23. 실수 x를 넘지 않는 최대의 정수를 $[x]$라고 하고 $\{x\} = x - [x]$로 정의하자 $x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$일 때, $\left[\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1}\right]$의 값은?

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$x = \sqrt{28 - 10\sqrt{3}} = \sqrt{28 - 2\sqrt{25 \times 3}} = 5 - \sqrt{3}$

$[5 - \sqrt{3}] = [3.2\cdots\cdots] = 3$

$\{x\} = (5 - \sqrt{3}) - 3 = 2 - \sqrt{3}$,

$\{x\}^{-1} = \dfrac{1}{2 - \sqrt{3}} = 2 + \sqrt{3}$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\} = 2 + \sqrt{3} - [2 + \sqrt{3}] = \sqrt{3} - 1$

$\left\{2 + \sqrt{3}\right\}^{-1} = \dfrac{1}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2} = 1.3\cdots\cdots$

따라서, $\left\{\{x\}^{-1}\right\}^{-1} = 1$

24. $x=\frac{\sqrt{3}}{4}$ 일 때, $\frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}+\frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 1

해설

$\sqrt{1\pm 2x}=\sqrt{1\pm\frac{\sqrt{3}}{2}}=\sqrt{\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{4}}=\frac{\sqrt{3}\pm 1}{2}$

$(\text{준식})=\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1+\frac{\sqrt{3}+1}{2}}+\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}-1}{2}}$

$=\frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}+\frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}$

$=\frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3}$

$=\frac{6}{6}=1$

25. $x,\ y$가 유리수일 때, $[x,\ y] = \sqrt{2}x + y$로 정의하자. 유리수 $a,\ b$가 $[2a,\ 2b] + 1 = [b,\ a] - 2$를 만족할 때, $a + b$의 값은?

① -4 ② -3 ③ -2 ④ -1 ⑤ 0

해설

$[2a,\ 2b] + 1 = \sqrt{2}(2a) + 2b + 1$
$[b,\ a] - 2 = \sqrt{2}b + a - 2$
$\therefore\ (2b+1) + 2a\sqrt{2} = (a-2) + b\sqrt{2}$

$\begin{cases} 2b + 1 = a - 2 \\ 2a = b \end{cases}$ 에서

$a = -1,\ b = -2$
$\therefore\ a + b = -1 - 2 = -3$