1. 등식 $(1+x+x^2)^3 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_8 x^8$ 이 x에 대한 항등식일 때, $a_1 + a_3 + a_5 + a_7$ 의 값은?

① 28 ② 26 ③ 15 ④ 14 ⑤ 13

해설

양변에 $x = 1$을 대입하면

$3^3 = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉠

양변에 $x = -1$을 대입하면

$1^3 = a_0 - a_1 + a_2 + \cdots + a_8$ – ㉡

㉠ – ㉡ : $26 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + a_7)$

$\therefore a_1 + a_3 + a_5 + a_7 = 13$

2. 다항식 $x^{51}+30$을 $x+1$로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$라 하자. 이때, $Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하면?

① -3　② -2　③ -1　④ 0　⑤ 1

해설

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+R$ 이라 하면

$x=-1$을 대입하면 $R=29$

$x^{51}+30=(x+1)Q(x)+29$

$Q(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는

$Q(1)$, $x=1$식에 대입

$31=2Q(1)+29$

$\therefore\ Q(1)=1$

3. 다음 식을 인수분해 하면 $(x+py)(x+qy+r)^2$ 이다. 이 때, $p^2+q^2+r^2$ 의 값을 구하여라.

$[x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y]$

▶ 답 :

▷ 정답 : 3

해설

$$x^3-y^3+x^2y-xy^2+2x^2-2y^2+x-y$$
$$=(x-y)(x^2+xy+y^2)+xy(x-y)+2(x+y)(x-y)+(x-y)$$
$$=(x-y)\{(x+y)^2+2(x+y)+1\}$$
$$=(x-y)(x+y+1)^2$$
$$p=-1, q=1, r=1$$
$$\therefore\ p^2+q^2+r^2=3$$

4. 두 복소수 x, y 에 대하여 $x+y=2+3i$ 라 할 때, $x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$ 의 값은?

① 13 ② $11+2i$ ③ 12

④ $12-i$ ⑤ 11

해설

$x+y=2+3i$, $\overline{x}+\overline{y}=2-3i$

$x\overline{x}+x\overline{y}+\overline{x}y+y\overline{y}$

$=x(\overline{x}+\overline{y})+y(\overline{x}+\overline{y}))$

$=(x+y)(\overline{x}+\overline{y})$

$=(2+3i)(2-3i)$

$=13$

5. $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $(1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$의 값을 구하면?

① 7　② 8　③ 9　④ 10　⑤ 13

해설

$\alpha,\ \beta$가 $x^2+(p-3)x+1=0$의 두 근이므로

$\alpha^2+(p-3)\alpha+1=0 \cdots\cdots$ ①

$\beta^2+(p-3)\beta+1=0 \cdots\cdots$ ②

①에서 $1+p\alpha+\alpha^2=3\alpha$

②에서 $1+p\beta+\beta^2=3\beta$

$\therefore\ (1+p\alpha+\alpha^2)(1+p\beta+\beta^2)$

$=3\alpha\cdot 3\beta$

$=9\alpha\beta$

$=9\ (\because\ \alpha\beta=1)$

6. 실계수의 이차방정식 $x^2+bx+c=0$이 허근 α, β를 갖고, 두 허근 사이에 $\alpha^2+2\beta=1$인 관계가 성립한다고 한다. 이 때, $b+c$의 값은?

① -1 ② 1 ③ 3 ④ 5 ⑤ 7

해설

계수가 실수이므로

$\alpha=p+qi$ 이면 $\beta=p-qi$ $(q\neq 0)$

$\alpha^2+2\beta=1$ 이므로

$(p+qi)^2+2(p-qi)=1$ 에서

$(p^2-q^2+2p-1)+2q(p-1)i=0$

$\therefore\ p^2-q^2+2p-1=0,\ 2q(p-1)=0$

$q\neq 0$이므로

$p=1,\ q^2=2$

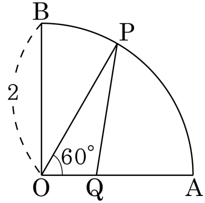
$\therefore\ \alpha+\beta=2p=2,\quad \alpha\beta=p^2+q^2=3$

$\therefore\ x^2-2x+3=0$

$\therefore\ b=-2,\ c=3$

$\therefore\ b+c=1$

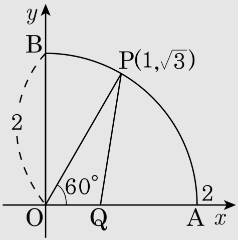
7. 반지름의 길이가 2 인 사분원 OAB 의 호 AB 위에 $\angle AOP = 60°$ 가 되도록 점 P 를 정한다. 이 때, 선분 OA 위를 움직이는 점 Q 에 대하여 $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 의 최솟값은?



① $\dfrac{13}{4}$ ② $\dfrac{7}{2}$ ③ $\dfrac{15}{4}$
④ $\dfrac{17}{4}$ ⑤ $\dfrac{9}{2}$

해설

아래 그림과 같이 좌표평면을 도입하여 생각해 보면



$A(2,0), B(0,2), P(1, \sqrt{3})$ 이 된다.

이 때, $Q(x,\ 0)$ 로 놓으면 $(0 < x < 2)$

$\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2 = x^2 + (x-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 2x^2 - 2x + 4 = 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{2}$

따라서, $x = \dfrac{1}{2}$ 일 때, $\overline{OQ}^2 + \overline{PQ}^2$ 은

최솟값 $\dfrac{7}{2}$ 을 갖는다.

8. 계수가 실수인 사차방정식 $x^4+ax^3+bx^2+14x+15=0$의 한근이 $1+2i$일 때, 두 실수 $a,\ b$의 합 $a+b$의 값은?

① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4

해설

한 근이 $1+2i$이면 $x=1+2i,\ \ x^2=-3+4i,\ \ x^3=-11-2i,\ \ x^4=-7-24i,$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15$

$=(-7-24i)+a(-11-2i)+b(-3+4i)+14(1+2i)+15=0,$

$(-11a-3b-7+14+15)+(-24-2a+4b+28)i$

$\therefore\ 11a+3b=22,\ -2a+4b=-4$

연립하여 풀면 $a=2, b=0$

해설

$x=1+2i$에서 $x^2-2x+5=0$

$x^4+ax^3+bx^2+14x+15=(x^2-2x+5)(x^2+kx+3)$

좌변을 전개하여 우변과 계수비교하면

$a=k-2,\ b=8-2k,\ 14=5k-6$

$\therefore\ k=4,\ a=2,\ b=0$

9. 구슬을 보관함 1상자당 구슬을 4 개씩 넣으면 구슬이 5 개가 남고, 구슬을 5 개씩 넣으면 모두 넣을 수 있지만 마지막 보관함에는 구슬이 2 개 이상 4 개 이하가 들어간다. 보관함의 개수로 가능한 것의 개수로 틀린 것을 모두 고르면?

① 4 상자　　② 5 상자　　③ 6 상자

④ 7 상자　　⑤ 8 상자

해설

보관함 x상자가 있다고 하면, 구슬의 수는 $(4x+5)$ 개 이다. 구슬을 5 개씩 넣을 경우 $x-1$ 개 까지는 5 개씩 들어가 있지만 마지막 보관함에는 2 개 이상 4 개 이하가 들어가게 된다. 2 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면, $5(x-1)+2$ 이고, 4 개가 들어갈 경우를 식으로 나타내면 $5(x-1)+4$ 이다. 구슬의 수는 보관함에 5 개씩 넣고 마지막 보관함에 2 개가 들어있는 경우와 4 개가 들어있는 경우 사이에 있으므로, 식으로 나타내면 $5(x-1)+2 \le 4x+5 \le 5(x-1)+4$ 이다. 이를 연립부등식으로

나타내면 $\begin{cases} 5(x-1)+2 \le 4x+5 \\ 4x+5 \le 5(x-1)+4 \end{cases}$ 이다.

간단히 정리하면 $\begin{cases} x \le 8 \\ x \ge 6 \end{cases}$ 이므로 연립부등식의 해는 $6 \le x \le 8$ 이다. 따라서 보관함은 6상자 또는 7상자 또는 8상자가 있다.

10. x보다 작거나 같은 정수 중에서 최대의 정수를 $[x]$, x보다 크거나 같은 정수 중에서 최소의 정수를 (x)로 나타낼 때, 방정식 $[x]+(x)=7$을 만족하는 x의 값을 모두 구하면?

① $\dfrac{7}{2}$　② $3 \le x \le 4$　③ $3 \le x < 4$

④ $3 < x \le 4$　⑤ $3 < x < 4$

해설

$$[x] = \begin{cases} k \ (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

$$(x) = \begin{cases} k \quad (x\text{가 정수 } k\text{일 때}) \\ k+1 \ (k < x < k+1\text{일 때}) \end{cases}$$

따라서, $[x]+(x)=7$ 이고

$[x]$, (x) 는 정수이므로

$[x]=3,\ (x)=4\ (\because\ [x] \le (x))$

$\therefore\ 3 < x < 4$

11. 부등식 $|x^2+x+1| \le |x+2|$의 해는?

① $x \le -1$ ② $-1 \le x \le 1$ ③ $x \ge 1$

④ 해는 없다. ⑤ 모든 실수

해설

$x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$이므로

$|x^2+x+1|=x^2+x+1$

$x^2+x+1 \le |x+2|$에서

(i) $x<-2$일 때,

$x^2+x+1 \le -(x+2),\ x^2+2x+3 \le 0$

$(x+1)^2+2 \le 0$

그런데 $(x+1)^2>0$이므로 해는 없다.

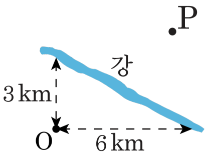
(ii) $x \ge -2$일 때,

$x^2+x+1 \le x+2,\ x^2 \le 1$

$\therefore -1 \le x \le 1$

(i), (ii)에 의해 $\therefore -1 \le x \le 1$

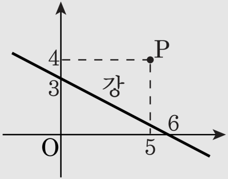
12. 다음 그림과 같이 직선으로 흐르는 강이 마을 O 로부터 동쪽으로 6 km , 북쪽으로 3 km 떨어져 있다. 또 마을 O 로부터 동쪽으로 5 km , 북쪽으로 4 km 의 위치에 마을 P 가 있다. 이 때, 마을 P 에서 강까지의 최단 거리를 구하시오.(단위는 km)



① $\frac{3\sqrt{5}}{5}$　② $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　③ $\frac{6\sqrt{5}}{5}$　④ $\frac{7\sqrt{5}}{5}$　⑤ $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

해설

마을 O 를 원점 O 로 하여 다음 그림과 같이 좌표축을 잡는다.



강을 나타내는 직선의 방정식을 구하면,

$y = -\frac{1}{2}x + 3$ 즉, $x + 2y - 6 = 0$

이때, 마을 P 의 좌표는 $(5,\ 4)$ 이다.

따라서, 점 $(5,\ 4)$ 에서 직선 $x + 2y - 6 = 0$ 까지의 거리를 구하면

$$\frac{|5+8-6|}{\sqrt{1+4}} = \frac{7}{\sqrt{5}} = \frac{7\sqrt{5}}{5}(km)$$

13. 두 원 $x^2+y^2=16$, $x^2+(y-4)^2=1$ 의 공통접선의 y 절편은?

① $\frac{26}{5}$ ② $\frac{21}{4}$ ③ $\frac{16}{3}$ ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

해설

공통접선의 방정식을 $y=mx+n$ 이라 하면
원의 중심에서 직선까지의 거리가 반지름의 길이와 같다.
중심 $(0,\ 0)$ 에서 접선까지의 거리가 4 ,
중심 $(0,\ 4)$ 에서 접선까지의 거리가 1 이므로

$$\frac{|n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=4$$

$$\frac{|-4+n|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$$

두 식을 연립하여 풀면

$4|-4+n|=|n|$

$4(-4+n)=\pm n$

$\therefore n=\frac{16}{5},\ \frac{16}{3}$ $n>5$ 이므로

구하는 공통접선의 y 절편은 $\frac{16}{3}$

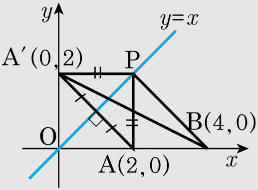
14. x 축 위의 두 점 $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(4, 0)$ 과 직선 $y=x$ 위를 움직이는 점 P 에 대하여 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은?

① 2 ② $2\sqrt{2}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ 4 ⑤ $2\sqrt{5}$

해설

점 $\mathrm{A}(2, 0)$ 을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한 점을 A′ 이라 하면 $\mathrm{A}'(0,\ 2)$

이때, 다음 그림에서



$\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{A'P}}$

또, $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{A'P}}+\overline{\mathrm{BP}} \geq \overline{\mathrm{A'B}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{BP}}$ 의 최솟값은

$\overline{\mathrm{A'B}}=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

15. 두 집합 $A = \{x \mid x$는 100 이상 250 이하 12의 배수$\}$, $B = \{x \mid x$는 100 보다 작은 4의 배수$\}$ 일 때, $n(B) - n(A)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 12

해설

$n(A) = 12, \quad n(B) = 24$

$n(B) - n(A) = 24 - 12 = 12$

16. 두 집합 $A=\{3,\ a,\ a^2\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$ 에 대하여 $A \subset B$, $B \subset A$ 이고, a, b, c 가 서로 다른 자연수일 때, $a+b+c$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 93

해설

$A \subset B$, $B \subset A$ 이므로 $A=B$

$9 \in B$ 이므로 $9 \in A$

$a=9$ 또는 $a^2=9$

(i) $a=9$ 일 때, $A=\{3,\ 9,\ 81\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$

$\therefore\ b=3,\ c=81$ 또는 $b=81,\ c=3$

(ii) $a^2=9$ 일 때, $a=3$ (a 는 자연수)

$A=\{3,\ 3^2\}=\{3,\ 9\}$, $B=\{b,\ c,\ 9\}$

b 또는 c가 3 이어야 하므로 a, b, c 가 서로 다른 자연수가 될 수 없다.

$\therefore\ a+b+c=9+3+81=93$

17. $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ 의 부분집합 중에서 1 또는 2 를 포함하는 부분집합의 개수를 구하여라.

▶ **답 :** ______ 개

▷ **정답 :** 24 개

해설

(i) 1 을 포함하는 경우

$2^{5-1} = 2^4 = 16$ (개)

(ii) 2 를 포함하는 경우

$2^{5-1} = 16$ (개)

(iii) 1 과 2 를 모두 포함하는 경우

$2^{5-2} = 8$ (개)

따라서 구하는 부분집합의 개수는

$16 + 16 - 8 = 24$ (개) 이다.

18. 두 집합 $A = \{3,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$, $B = \left\{x \middle| x\text{는 } 3 \le x \le 5\text{인 자연수}\right\}$ 에 대하여 $(A - B) \cup X = X$, $(A \cup B) \cap X = X$ 를 만족하는 집합 X 의 개수를 구하여라.

▶ 답 : ______ 개

▷ 정답 : 8 개

해설

$B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$(A - B) \cup X = X$ 이므로 $(A - B) \subset X$

$(A \cup B) \cap X = X$ 이므로 $X \subset (A \cup B)$

$\{6,\ 8,\ 9,\ 11\} \subset X \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$

집합 X 는 $A \cup B$ 의 부분집합 중 원소 6, 8, 9, 11 을 반드시 포함하는 집합이다.

$\therefore\ 2^{7-4} = 2^3 = 8$ (개)

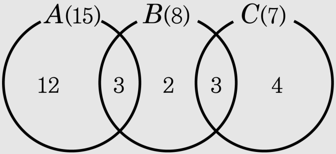
19. 세 집합 A, B, C에 대하여 $n(A)=15$, $n(B)=8$, $n(C)=7$, $n(A\cap B)=3$, $A\cap C=\varnothing$, $n(B\cap C)=3$일 때, $n(A\cup B\cup C)$의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 24

해설

주어진 조건을 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ n(A\cup B\cup C)=24$

20. 전체집합 $U = \{x|x$는 40이하의 자연수$\}$, $n(A) = 12$, $n(B) = 14$, $n(A \cap B) = 5$ 일 때, $n((A \cup B)^c)$ 를 구한 것은? .

① 18　② 19　③ 20　④ 21　⑤ 22

해설

$n(U) = 40,\ n(A) = 12,\ n(B) = 14$
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 26 - 5 = 21$
$n((A \cup B)^c) = n(U) - n(A \cup B) = 40 - 21 = 19$

21. $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \cdots$ 에 대하여 $f_0(x) = \dfrac{1}{1-x}$ 이고 $f_{n+1}(x) = f_0(f_n(x))$ 일 때, $f_{100}(100)$ 의 값은?

① $-\dfrac{1}{99}$ ② $\dfrac{99}{100}$ ③ $\dfrac{100}{99}$ ④ 99 ⑤ 100

해설

$$f_0(x) = \frac{1}{1-x}$$

$$f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}} = \frac{x-1}{x}$$

$$f_2(x) = f_0(f(x)) = \frac{1}{1-\dfrac{x-1}{x}} = x$$

$n = 2$ 일 때 $f(x) = x$ 이다.

즉 3 번을 주기로 함수가 반복된다는 뜻이다.

따라서 $f_{100}(x) = f_{3\times33+1}(x) = f_1(x) = \dfrac{x-1}{x}$

$$\therefore\ f_{100}(100) = \frac{100-1}{100} = \frac{99}{100}$$

22. 함수 $f_n(x)$ (n 은 자연수)는 보기의 두 조건을 만족한다.

보기

㉠ $f_1(x) = \dfrac{1-x}{x+1}$

㉡ $f_n(x) = (f_{n-1} \circ f_1)(x) (n = 2, 3, 4, \cdots)$

이 때, $f_{2007}(2)$ 의 값은? (단, $x \neq -1$)

① $\dfrac{1}{3}$ ② 2 ③ $\dfrac{1}{5}$ ④ $-\dfrac{1}{3}$ ⑤ $\dfrac{7}{5}$

해설

$f_1(2) = -\dfrac{1}{3},\ f_2(2) = 2,\ f_3(2) = -\dfrac{1}{3},\ f_4(3) = 2\cdots$

$\Rightarrow f_{2n}(2) = 2,\ f_{2n+1}(2) = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f_{2007}(2) = -\dfrac{1}{3}$

23. 역함수가 존재하는 두 함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=4x+1$ 에 대하여 $(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9)$ 의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5 ④ 7 ⑤ 9

해설

$(g\cdot f)^{-1}(x)=(f^{-1}\cdot g^{-1})(x)$ 이므로

$$\begin{aligned}(f\circ(g\circ f)^{-1}\circ g)(9)&=(f\circ f^{-1}\circ g^{-1}\circ g)(9)\\&=(\mathrm{I}\circ\mathrm{I})(9)\\&=9\end{aligned}$$

24. $\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35}$ 에서 $\dfrac{x^2+y^2}{z^2}$ 의 값은? (단, x, y, z 는 모두 양수이다.)

① 1　　② 2　　③ 3　　④ 4　　⑤ 5

해설

$\dfrac{x(y+z)}{27} = \dfrac{y(z+x)}{32} = \dfrac{z(x+y)}{35} = k(k \neq 0)$ 라 하면

$xy + zx = 27k$, $zy + xy = 32k$, $zx + yz = 35k$ 이므로

$2(xy + yz + zx) = 94k$, $\quad \therefore \; xy + yz + zx = 47k$ 이므로

$yz = 20k$, $zx = 15k$, $xy = 12k$

또, $x^2 \cdot y^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 이므로

$x^2\ 400k^2 = 3600k^3$ 에서 $x^2 = 9k$

$225k^2 \cdot y^2 = 3600k^3$ 에서 $y^2 = 16k$

$144k^2 \cdot z^2 = 3600k^3$ 에서 $z^2 = 25k$

$$\therefore \; \frac{x^2+y^2}{z^2} = \frac{9k+16k}{25k} = 1$$

25. $2 \le x \le 4$일 때, 함수 $y = \dfrac{3x-4}{x-1}$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 한다. Mm의 값은?

① $\dfrac{2}{3}$　② $\dfrac{4}{3}$　③ $\dfrac{8}{3}$　④ $\dfrac{16}{3}$　⑤ $\dfrac{20}{3}$

해설

$$y = \frac{3x-4}{x-1} = \frac{-1}{x-1} + 3$$

$x = 2$일 때 최소이므로, $M = \dfrac{-1}{2-1} + 3 = 2$

$x = 4$일 때 최대이므로, $m = \dfrac{-1}{4-1} + 3 = \dfrac{8}{3}$

$$\therefore \quad Mm = 2 \times \frac{8}{3} = \frac{16}{3}$$