

1. $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 이고, $a = \sqrt{3} + 1$ 일 때, $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3}$ 의 값을 구하면?

① $\frac{2 - \sqrt{3}}{4}$

② $\frac{4 + \sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{2\sqrt{3} - 3}{4}$

④ $\frac{2 - \sqrt{3}}{2}$

⑤ $\frac{2 + \sqrt{3}}{2}$

해설

(i) $x = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ 에서 $x - \sqrt{2} = \sqrt{3}$

$$x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = 3$$

$$\therefore x^2 - 2\sqrt{2}x = 1$$

(ii) $a^{x^2} \div a^{2\sqrt{2}x+3} = a^{x^2-2\sqrt{2}x-3} = a^{-2}$

$$= \frac{1}{a^2} = \frac{2 - \sqrt{3}}{2}$$

2. x^{30} 을 $x-3$ 으로 나눌 때 몫을 $Q(x)$, 나머지를 R 라 하면 $Q(x)$ 의 계수의 총합(상수항 포함)과 R 과의 차는?

① $\frac{1}{2}(3^{29} + 1)$

② $\frac{1}{2} \cdot 3^{30}$

③ $\frac{1}{2}(3^{30} - 1)$

④ $\frac{1}{2}(3^{30} + 1)$

⑤ $\frac{1}{2}(3^{29} - 1)$

해설

$$x^{30} = (x-3)Q(x) + R$$

$$x=3\text{을 대입하면 } 3^{30} = R$$

$Q(x)$ 의 계수의 총합은 $Q(1)$ 과 같으므로

$$x=1\text{을 대입하면 } 1 = -2Q(1) + 3^{30}$$

$$\therefore Q(1) = \frac{3^{30} - 1}{2}$$

$$\therefore R - Q(1) = 3^{30} - \frac{3^{30} - 1}{2} = \frac{3^{30} + 1}{2} = \frac{1}{2}(3^{30} + 1)$$

3. $(x+2)(x-3)(x+6)(x-9)+21x^2$ 을 인수분해하면 $(x^2+p)(x^2+qx-18)$ 이다. pq 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 72

해설

$$\begin{aligned}(\text{준식}) &= \{(x+2)(x-9)\}\{(x-3)(x+6)\} + 21x^2 \\ &= (x^2-7x-18)(x^2+3x-18) + 21x^2 \\ &= \{(x^2-18)-7x\}\{(x^2-18)+3x\} + 21x^2 \\ &= (x^2-18)^2 - 4x(x^2-18) - 21x^2 + 21x^2 \\ &= (x^2-18)(x^2-4x-18)\end{aligned}$$

따라서 $p = -18, g = -4$

$$\therefore pg = (-18) \times (-4) = 72$$

4. $\alpha = a + bi$ (a, b 는 실수, $i = \sqrt{-1}$) 일 때, $\alpha' = b + ai$ 라 한다.

$\alpha = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ 일 때, $2\alpha^5(\alpha')^4$ 을 간단히 하면?

① $1 + i$

② $1 - i$

③ $2 + i$

④ $2 - i$

⑤ $\sqrt{3} + i$

해설

$\alpha = a + bi$, $\alpha' = b + ai$ 이므로

$$\alpha\alpha' = (a + bi)(b + ai) = (a^2 + b^2)i$$

그런데 $\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = a + bi$ 에서

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2}, b = \frac{1}{2} \quad \therefore \alpha\alpha' = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)i = i$$

$$\therefore (\text{준식}) = 2\alpha(\alpha \cdot \alpha')^4 = 2 \cdot \frac{\sqrt{3} + i}{2} \cdot i^4 = \sqrt{3} + i$$

5. 복소수들 사이의 연산 $*$ 가 다음과 같다고 하자.
 $\alpha * \beta = \alpha + \beta + \alpha\beta i$
이 때, $(1 + 2i) * z = 1$ 을 만족시키는 복소수 z 는?(단, $i = \sqrt{-1}$)
- ① $1 + i$

② $1 - i$

③

$-1 + i$

④ $-1 - i$

⑤ i

해설

$$\begin{aligned} z &= a + bi \text{라 하면} \\ (1 + 2i) * z &= (1 + 2i) + (a + bi) + (1 + 2i)(a + bi)i \\ &= (-a - b + 1) + (a - b + 2)i = 1 \\ -a - b + 1 &= 1, \quad a - b + 2 = 0 \\ a &= -1, \quad b = 1 \\ \therefore z &= -1 + i \end{aligned}$$

7. 둘레의 길이가 48cm 인 직사각형 중에서 그 넓이가 최대가 되도록 하는 직사각형의 가로, 세로의 길이를 순서대로 써라.

▶ 답 : cm

▶ 답 : cm

▷ 정답 : 12cm

▷ 정답 : 12cm

해설

가로, 세로의 길이를 각각 x cm, $(24 - x)$ cm 라 하면

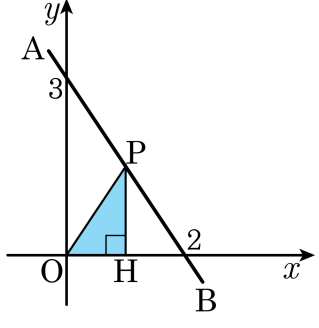
$$\begin{aligned}y &= x(24 - x) \\&= -x^2 + 24x \\&= -(x - 12)^2 + 144\end{aligned}$$

$x = 12$ 일 때, 최댓값 144를 갖는다.

$$\therefore x = 12, 24 - x = 12$$

따라서 가로의 길이는 12 cm, 세로의 길이도 12 cm

8. 선분 AB 위의 한 점 P 에서 x 축에 내린 수선의 발을 H 라고 할 때, $\triangle POH$ 의 넓이의 최댓값을 구하여라.



▶ 답 :

▷ 정답 : 0.75

해설

$\overline{AB}$ 를 지나는 직선은 두 점 $(0, 3)$, $(2, 0)$ 을 지나므로

$$y = -\frac{3}{2}x + 3$$

H 점의 좌표를 $(a, 0)$ 이라고 하면, 점 P 의 좌표는 $\left(a, -\frac{3}{2}a + 3\right)$

$$\begin{aligned}\triangle POH &= \frac{1}{2} \times a \times \left(-\frac{3}{2}a + 3\right) \\ &= -\frac{3}{4}a^2 + \frac{3}{2}a \\ &= -\frac{3}{4}(a^2 - 2a + 1 - 1) \\ &= -\frac{3}{4}(a - 1)^2 + \frac{3}{4}\end{aligned}$$

따라서 최댓값은 $\frac{3}{4}$ 이다.

9. 다음 조건을 동시에 만족하는 x 의 범위는?

(가) $2x - y = -5$

(나) $-x < 2y < 3(x + 6)$

- ① $x > 8$

② $x < -2$

③ $-8 < x < -2$

④ $-2 < x < 8$

⑤ $-8 < x < 2$

해설

$2x - y = -5 \Rightarrow y = 2x + 5$ 를 부등식에 대입하면,

$-x < 2(2x + 5) < 3(x + 6)$

$\begin{cases} -x < 2(2x + 5) \\ 2(2x + 5) < 3(x + 6) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x < 4x + 10 \\ 4x + 10 < 3x + 18 \end{cases}$

정리하면 $\begin{cases} x > -2 \\ x < 8 \end{cases}$ 이므로 $-2 < x < 8$ 이다.

10. 부등식 $a(x^2 - 2x + 1) > 2(x^2 - 2x - 2)$ 를 만족하는 실수 x 가 존재할 때, 상수 a 의 범위는?

- ① $a > 2$
- ② $a \geq 2$
- ③ $a < 2$
- ④ a 는 모든 실수
- ⑤ $a < \pm 2$

해설

$a = 2$ 일 때, $6 > 0$ 이므로 x 는 모든 실수
 $a \neq 2$ 일 때,
 $(a - 2)x^2 - 2(a - 2)x + a + 4 = 0 \cdots \textcircled{1}$ 에서
 $\frac{D}{4} = (a - 2)^2 - (a - 2)(a + 4) = -6(a - 2)$ 이므로
i) $a > 2$ 이면, x 는 모든 실수
ii) $a < 2$ 이면, $\frac{D}{4} > 0$ 이므로 $\textcircled{1}$ 의 근을
 $\alpha, \beta (\alpha < \beta)$ 라 하면
부등식의 해는 $\alpha < x < \beta$ 이므로 x 값이 존재한다.
 $\therefore a$ 는 모든 실수

11. 다음 부등식 ㉠과 부등식 ㉡의 해가 일치할 때, a, b 의 값을 구하면?

$$x^2 - 2x - 3 < 3|x - 1| \cdots \textcircled{㉠}$$
$$ax^2 + 2x + b > 0 \cdots \textcircled{㉡}$$

- ① $a = -1, b = 15$

② $a = -2, b = 14$
- ③ $a = -3, b = 13$

④ $a = -4, b = 12$
- ⑤ $a = -5, b = 10$

해설

㉠ 부등식에서 $x \geq 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < 3x - 3$
 $\therefore x^2 - 5x < 0$ 이므로 $0 < x < 5$
 $\therefore 1 \leq x < 5 \cdots \textcircled{㉢}$
 $x < 1$ 일 때 $x^2 - 2x - 3 < -3x + 3$
 $x^2 + x - 6 < 0$ 이므로 $(x - 2)(x + 3) < 0$
 $\therefore -3 < x < 2$ 따라서 $-3 < x < 1 \cdots \textcircled{㉣}$
㉢, ㉣에 의하여 $-3 < x < 5$
 $\therefore a(x + 3)(x - 5) < 0$
 $\therefore a(x^2 - 2x - 15) < 0$
 $ax^2 + 2x + b > 0$ 와 일치해야 하므로
 $a = -1, b = 15$

12. 두 점 A (-3, 4), B (2, 6)에서 같은 거리에 있는 x 축 위의 점 P와 y 축 위의 점 Q의 좌표는?

- ① $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$ ② $P\left(\frac{1}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$
③ $P\left(-\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{1}{4}\right)$ ④ $P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{7}{4}\right)$
⑤ $P\left(\frac{5}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{2}\right)$

해설

P의 좌표를 $P(a, 0)$ 라 하면

$\overline{AP} = \overline{BP}$ 이므로

$$\sqrt{(a+3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{(a-2)^2 + (-6)^2}$$

Q의 좌표를 $Q(0, b)$ 라 하면

$\overline{AQ} = \overline{BQ}$ 에서

$$\sqrt{3^2 + (b-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (b-6)^2}$$

두 식을 제곱하여 정리하면 $a = \frac{3}{2}, b = \frac{15}{4}$

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, 0\right), Q\left(0, \frac{15}{4}\right)$$

13. 두 점 A(1, 0), B(4, 0) 에서의 거리의 비가 2 : 1 이 되도록 움직이는 점 P 의 자취는 원이다. 이 원의 둘레의 길이는?

① 2π ② $2\sqrt{3}\pi$ ③ 4π ④ $2\sqrt{5}\pi$ ⑤ 8π

해설

점 P 의 자취는 점 A, B 의 내분점, 외분점을
지름의 양끝으로 하는 원과 같다.

$$\Rightarrow \text{내분점은 } \left(\frac{2 \times 4 + 1 \times 1}{2 + 1}, 0 \right) = (3, 0)$$

$$\Rightarrow \text{외분점은 } \left(\frac{2 \times 4 - 1 \times 1}{2 - 1}, 0 \right) = (7, 0)$$

$\therefore$ 중심은 (5, 0) 이고, 반지름은 2 인 원

$$\Rightarrow \text{둘레의 길이는 } 2 \times 2 \times \pi = 4\pi$$

14. 두 점 A(-4, 2), B(2, -1)로 부터의 거리의 비가 2 : 1 인 점이 나타내는 원의 중심과 직선 $y = 3x - 4$ 의 거리는?

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$ ④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

해설

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 2 : 1$$

$$2\overline{BP} = \overline{AP}$$

$$4\overline{BP}^2 = \overline{AP}^2$$

$$4 \cdot \{(x-2)^2 + (y+1)^2\} = (x+4)^2 + (y-2)^2$$

$$3x^2 + 3y^2 - 24x + 12y = 0$$

$$(x-4)^2 + (y+2)^2 = 20$$

원의 중심 (4, -2)와 직선 $3x - y - 4 = 0$ 간의 거리

$$\therefore \frac{|12 + 2 - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{10}{\sqrt{10}} = \sqrt{10}$$

15. 두 집합 $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ 에 대하여 집합 $C = \{x \mid x = a \times b, a \in A, b \in B\}$ 이다. 이때, 집합 C 를 원소나열법으로 나타낸 것은?
- ① $\{0\}$ ② $\{0, 1\}$ ③ $\{0, 1, 2\}$
④ $\{0, 1, 2, 3\}$ ⑤ $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

해설

$0 \times 1 = 0, 0 \times 2 = 0, 0 \times 3 = 0, 1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 1 \times 3 = 3$
이므로 $C = \{0, 1, 2, 3\}$ 이다.

16. 두 집합 $A = \{4, 6, a, 10\}$, $B = \{3a, 4 - b\}$ 에 대하여 $B \subset A$ 일 때, 자연수 $a - b$ 의 값을 구하여라. (단, a, b 는 0 보다 크고 4 와 같거나 작다.)

① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4

해설

$B \subset A$ 이므로 집합 B 의 모든 원소는 A 에도 포함된다.

$3a \in A$, $4 - b \in A$

a 는 0 보다 크고 4 이하인 자연수라 했으므로, 4 와 10 과 a 는

$3a$ 가 될 수 없다.

따라서 $3a = 6$ 이다. $\therefore a = 2$

$A = \{2, 4, 6, 10\}$

b 역시 0 보다 크고 4 이하인 자연수라 했으므로, $4 - b = 2$ 이어야

한다.

$\therefore b = 2$

따라서 $a - b$ 는 0 이다.

17. 집합 $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 의 부분집합 X 에 대하여, 집합 $B = \{2, 4, 7\}$, $B \cap X \neq \emptyset$ 일 때, 집합 X 의 개수를 구하라.

▶ 답: 개

▷ 정답 : 24개

해설

원소 개수가 n 개 인 집합의 부분집합 개수는 2^n 개 이다.

⇒ 집합 A의 부분집합의 개수 : $2^5 = 32$

먼저 $B \cap X = \emptyset$ 인 경우를 계산해 보면 {1, 3, 5}의 부분집합의 개수, 즉 $2^3 = 8$ 이 된다. ∴ $B \cap X \neq \emptyset$ 인 부분집합 X 의 개수는 $32 - 8 = 24$ (개)

18. 다음 중에서 $\{(A - B) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\}$ 와 같은 집합이 아닌 것은?

① $(A \cup B) - (A \cap B)$

② $(A \cup B) \cap (A^c \cup B^c)$

③ $(A - B) \cup (B - A)$

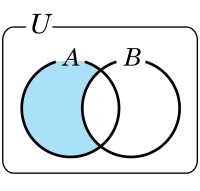
④ $(A \cup B^c) \cap (A^c \cup B)$

⑤ $(A \cap B)^c \cap (A \cup B)$

해설

$$\begin{aligned} & \{(A - B) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\} \\ &= \{(A \cap B^c) \cup A^c\} \cap \{(A \cap B^c) \cup B\} \\ &= (A^c \cup B^c) \cap (A \cup B) \\ &= (A \cap B)^c \cap (A \cup B) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

19. 다음 중 다음 벤 다이어그램의 색칠된 부분이 나타내는 집합에 대한 설명이다. 옳은 것을 모두 고르면 ?



- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 마이너스 B 라고 읽는다.
- ② A 에도 속하고 B 에도 속하는 원소들로 이루어진 집합이다.
- ③ $A - B = \{x|x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$
- ④ $A - B = B - A$
- ⑤ $A - B = A \cap B^c$

해설

- ① $A - B$ 라고 쓰며, A 차집합 B 라고 읽는다.
- ② A 에는 속하지만 B 에도 속하지 않는 원소들로 이루어진 집합이다
- ④ $A - B \neq B - A$

20. 등식 $(A - B) - C = A - (B \cup C)$ 를 증명하는 데 꼭 필요한 것을 다음 중에서 모두 고르면?

- | | |
|-------------|------------------------|
| ㉠ 교환법칙 | ㉡ 결합법칙 |
| ㉢ 분배법칙 | ㉣ 흡수법칙 |
| ㉤ 드 모르간의 법칙 | ㉥ $X - Y = X \cap Y^c$ |

- ① ㉡, ㉢, ㉤ ② ㉠, ㉡, ㉢, ㉤ ③ ㉢, ㉣, ㉤
④ ㉡, ㉢, ㉤, ㉥ ⑤ ㉡, ㉢, ㉣, ㉤

해설

$(A - B) - C = (A \cap B^c) - C \cdots \text{㉤}$
 $= (A \cap B^c) \cap C^c \cdots \text{㉡}$
 $= A \cap (B^c \cap C^c) \cdots \text{㉡}$
 $= A \cap (B \cup C)^c \cdots \text{㉤}$
 $= A - (B \cup C) \cdots \text{㉤}$
따라서 ㉡, ㉢, ㉤이다.

21. 자연수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & (n \geq 100 \text{일때}) \\ f(f(n+4)) & (n < 100 \text{일때}) \end{cases} \quad \text{에서 } f(96) \text{의 값을 구하면?}$$

① 78

② 80

③ 98

④ 99

⑤ 100

해설

$$\begin{aligned} f(96) &= f(f(100)), \quad f(100) = 98, \\ f(98) &= f(f(102)), \quad f(102) = 100 \\ \therefore f(96) &= 98 \end{aligned}$$

22. 함수 $f(x) = x+2$ 에 대하여 $f \circ f = f^2$, $f \circ f^2 = f^3, \dots, f \circ f^{99} = f^{100}$ 으로 정의할 때, $f^{100}(1)$ 의 값을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 201

해설

$$\begin{aligned} f(x) &= x+2 \\ f^2(x) &= f(f(x)) = f(x+2) = (x+2)+2 \\ &= x+2 \cdot 2 \\ f^3(x) &= f(f^2(x)) = f(x+2 \cdot 2) = (x+2 \cdot 2)+2 \\ &= x+2 \cdot 3 \\ &\vdots \\ f^{100}(x) &= x+2 \cdot 100 \\ \therefore f^{100}(1) &= 1+2 \cdot 100 = 201 \end{aligned}$$

23. 두 함수 $f(x) = 2x - 1$, $g(x) = -4x + 5$ 에 대하여 $f \circ h = g$ 가 성립할 때, 함수 $h(x)$ 에 대하여 $h(-5)$ 를 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 13

해설

$f \circ h = g$ 의 양변의 왼쪽에 f^{-1} 를 합성하면 $f^{-1} \circ (f \circ h) = f^{-1} \circ g$

$f^{-1} \circ (f \circ h) = (f^{-1} \circ f) \circ h = I \circ h = h$ (단, I 는 항등함수)

$\therefore h = f^{-1} \circ g$

한 편, $f(x) = 2x - 1$ 에서 $y = 2x - 1$ 로 놓고, x 에 대하여 풀면

$$x = \frac{1}{2}(y + 1)$$

x 와 y 를 바꾸어 쓰면 $y = \frac{1}{2}(x + 1)$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$$

$$h(x) = (f^{-1} \circ g)(x) = f^{-1}(g(x)) = f^{-1}(-4x + 5) = \frac{1}{2}(-4x + 5 + 1) = -2x + 3$$

$$\therefore h(-5) = -2 \cdot (-5) + 3 = 13$$

24. $2 \leq x \leq 3$ 에서 부등식 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립할 때, a 의 최댓값과 b 의 최솟값의 합을 구하면?

- ① $\frac{1}{3}$
- ② $\frac{2}{3}$
- ③ 1
- ④ $\frac{4}{3}$
- ⑤ $\frac{5}{3}$

해설

$$y = \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{2}{x-1} + 1$$

따라서, 분수함수 $y = \frac{x+1}{x-1}$ 의 그래프는

$y = \frac{2}{x}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로

1 만큼, y 축의 방향으로 1 만큼 평행이동한 것이다.

두 직선 $y = ax + 1$, $y = bx + 1$ 은 a , b 의 값에

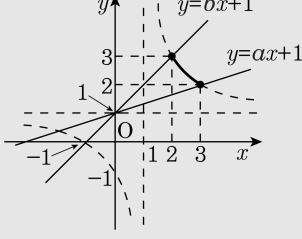
관계없이 점 $(0, 1)$ 을 지나는 직선이므로

$2 \leq x \leq 3$ 에서 $ax + 1 \leq \frac{x+1}{x-1} \leq bx + 1$ 이 항상 성립하려면 다음

그림에서 $a \leq \frac{1}{3}$, $b \geq 1$

따라서, a 의 최댓값은 $\frac{1}{3}$, b 의

최솟값은 1 이므로 그 합은 $\frac{4}{3}$



25. $\langle x \rangle = x - [x]$ 라 할 때,
 $\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle - \frac{1}{\langle \sqrt{3+2\sqrt{2}} \rangle}$ 의 값은?(단, $[x]$ 는 x 보다 크지 않은 최대 정수이다.)
- ① $-2\sqrt{2}$ ② -2 ③ -1
 ④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

해설

$$\begin{aligned}\sqrt{3+2\sqrt{2}} &= \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} \\ &= \sqrt{2}+1 = x \text{라 하자.} \\ [x] &= 2, \langle x \rangle = \sqrt{2}-1 \\ (\text{준식}) &= (\sqrt{2}-1) - \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ &= \sqrt{2}-1 - (\sqrt{2}+1) = -2\end{aligned}$$