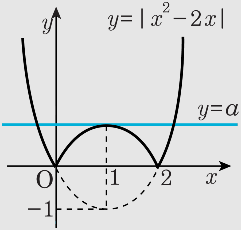
1. 함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프와 직선 $y = a$ 가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 상수 a 의 값은?

① $-\frac{1}{2}$ ② 0 ③ $\frac{1}{2}$ ④ 1 ⑤ 2

해설

함수 $y = |x^2 - 2x|$ 의 그래프를 그리면
아래 그림과 같다.

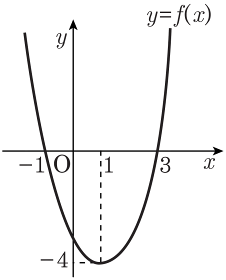


이때, 직선 $y = a$와 서로 다른 세 점에서 만나려면
직선 $y = a$ 가 포물선 $y = -x^2 + 2x$ 의
꼭지점을 지나야 한다.

$y = -x^2 + 2x = -(x-1)^2 + 1$ 에서
꼭지점의 좌표는 $(1, 1)$ 이므로 $y = 1$

$\therefore\ a = 1$

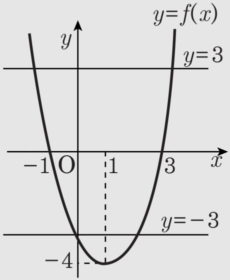
2. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(|f(x)|) = 0$ 의 실근의 개수는?



① 2 개　② 4 개　③ 6 개
④ 8 개　⑤ 0 개

해설

$|f(x)| = t \ (t \geq 0)$ 로 놓으면
$f(|f(x)|) = 0 \Leftrightarrow f(t) = 0$
$\therefore \ t = 3(\because \ t \geq 0)$
$\therefore \ |f(x)| = 3$
ⅰ) $f(x) = 3$ 일 때
$y = f(x)$ 와 $y = 3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.
$\therefore$ 2 개
ⅱ) $f(x) = -3$ 일 때
$y = f(x)$ 와 $y = -3$ 의 교점의 개수가 실근의 개수이다.
$\therefore$ 2 개



따라서 방정식 ⅰ), ⅱ)에 의해 $f(|f(x)|) = 0$ 의 실근의 개수는 4 개다.

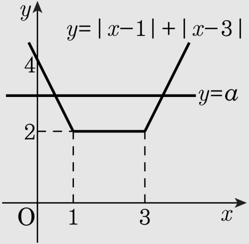
3. x의 방정식 $|x-1|+|x-3|=a$가 서로 다른 두 개의 실근을 가질 때, 실수 a 의 값의 범위는?

① $a<1$ ② $a>1$ ③ $a<2$ ④ $a>2$ ⑤ $a<3$

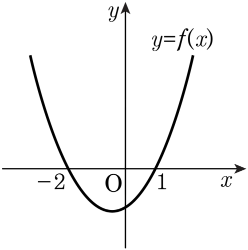
해설

좌 우변을 각각 그래프를 그려보면

$a>2$



4. 이차함수 $y=f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차함수 $f(x+a)=0$ 의 두 실근의 합이 5 가 되도록 하는 상수 a 의 값은?



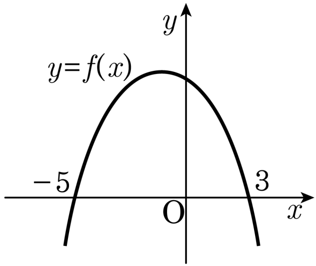
① -3　② -2　③ -1
④ 0　⑤ 1

해설

$y=f(x+a)$ 의 그래프는 $y=f(x)$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $-a$ 만큼 평행이동한 것이다.

$y=f(x)$ 이 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표가 $-2, 1$ 이므로
$y=f(x+a)$ 의 그래프가
x 축과 만나는 점의 좌표는 $-2-a, 1-a$
따라서, 방정식 $f(x+a)=0$ 의 두 실근이
$-2-a,\ 1-a$ 이고
그 합이 5 이므로 $-2-a+1-a=5$
$\therefore a=-3$

5. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 이차방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은?



① 2 ② 4 ③ 6 ④ 8 ⑤ 10

해설

$f(x) = a(x+5)(x-3)$ $(a < 0)$ 으로 놓으면

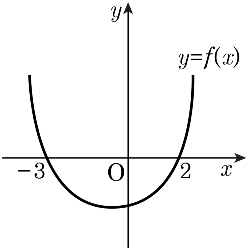
$$f\left(\frac{x-4}{2}\right) = a\left(\frac{x-4}{2}+5\right)\left(\frac{x-4}{2}-3\right)$$
$$= \frac{a}{4}(x+6)(x-10)$$ 이므로

$\frac{a}{4}(x+6)(x-10) = 0$ 에서

$x = -6$ 또는 $x = 10$

따라서 방정식 $f\left(\frac{x-4}{2}\right) = 0$ 의 두 근의 합은 4

6. 이차함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 다음 그림과 같을 때, 방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는?



① 1개　　② 2개　　③ 3개

④ 4개　　⑤ 5개

해설

주어진 그래프에서 $f(-3)=0,\ f(2)=0$ 이므로
방정식 $f(x^2-1)=0$ 의 근은
(i) $x^2-1=-3$ 일 때, $x^2=-2$　$\therefore\ x=\pm\sqrt{2}i$
(ii) $x^2-1=2$ 일 때, $x^2=3$　$\therefore\ x=\pm\sqrt{3}$
(i), (ii)에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2개이다.

7. x 에 대한 이차방정식 $x^2+2ax-9+2a^2=0$ 이 실근 α, β 를 가질 때, $|\alpha-\beta|$ 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : 6

해설

$x^2+2ax-9+2a^2=0$ 에서

근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=-9+2a^2$

$|\alpha-\beta|^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=(-2a)^2-4(-9+2a^2)=-4a^2+36$

그런데 $\dfrac{D}{4}=a^2+9-2a^2\geq 0$

$\therefore\ -3\leq a\leq 3$

$\therefore\ 0\leq|\alpha-\beta|^2\leq 36$

즉, $0\leq|\alpha-\beta|\leq 6$

$\therefore$ (최댓값)+ (최솟값)$=0+6=6$

8. $y = x^2 - 2\,|\,x\,|\, + 2(-1 \le x \le 3)$ 의 최댓값, 최솟값을 각각 M, m 이라 할 때, $M + m$ 의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

해설

$y = x^2 - 2|x| + 2(-1 \le x \le 3)$ 에서

(i) $-1 \le x < 0$ 일 때,

$$y = x^2 + 2x + 2 = (x+1)^2 + 1$$

(ii) $0 < x \le 3$ 일 때,

$$y = x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1$$ 이므로

$\therefore\ M = 5,\ m = 1 \qquad \therefore\ M + m = 5 + 1 = 6$

9. x의 범위가 $-1 \le x \le 2$ 일 때, 이차함수 $y = -2x^2 + 4x + 1$ 의 최댓값을 구하면?

① -2 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

해설

$y = -2(x-1)^2 + 3$

$\therefore x = 1$ 일 때, 최댓값 3

10. $x^2-xy+y^2+2y=0$ 을 만족하는 실수 x, y 에 대하여 x 의 최댓값은?

① $\frac{2}{3}$　　② 1　　③ 2　　④ $\frac{11}{5}$　　⑤ 4

해설

주어진 식을 y 에 대하여 정리하면

$y^2+(2-x)y+x^2=0$

이 식을 y 에 대한 이차방정식으로 보면 y 가 실수이므로 실근을 갖는다.

$D=(2-x)^2-4\cdot x^2\geq 0$,

$3x^2+4x-4\leq 0$, $(x+2)(3x-2)\leq 0$

$\therefore -2\leq x\leq \frac{2}{3}$

따라서 x 의 최댓값은 $\frac{2}{3}$ 이다.

11. 두 실수 x, y 가 $x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 만족할 때, x 의 최댓값과 최솟값의 합을 구하여라.

▶ 답 :

▷ 정답 : -2

해설

$x^2+y^2+2x-2y-2=0$ 을 y 에 대한 식으로 정리하면
$y^2-2y+\left(x^2+2x-2\right)=0$
x, y 는 실수이므로 이 이차방정식은 실근을 갖는다.
$\frac{D}{4}=(-1)^2-\left(x^2+2x-2\right)\geq 0$
$x^2+2x-3\leq 0$, $(x+3)(x-1)\leq 0$
$\therefore -3\leq x\leq 1$, x 의 최댓값은 1 , 최솟값은 -3
따라서, 구하는 최댓값과 최솟값의 합은 -2

12. 실수 x, y가 $x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을 만족시킬 때, x의 최댓값과 y의 최댓값의 합은?

① $2\sqrt{2} - 1$ ② $2\sqrt{2} + 1$ ③ $2\sqrt{2} + 2$

④ $\sqrt{2} + 4$ ⑤ $\sqrt{2} + 5$

해설

$x^2 + 2y^2 - 2xy - 4 = 0$을

(i) x에 대한 내림차순으로 정리하면

$x^2 - 2yx + 2y^2 - 4 = 0$에서 x가 실수이므로

$$\frac{D}{4} = y^2 - (2y^2 - 4) \geq 0,\ y^2 \leq 4$$

$\therefore\ -2 \leq y \leq 2$

따라서, y의 최댓값은 2이다.

(ii) y에 대한 내림차순으로 정리하면

$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0$에서 y가 실수이므로

$$\frac{D'}{4} = x^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0,\ x^2 \leq 8$$

$\therefore\ -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

따라서, x의 최댓값은 $2\sqrt{2}$이다.

(i), (ii)에 의해 구하는 합은 $2\sqrt{2} + 2$